Chapter 5

可靠度評估

■ 5.1 緒言

可靠度評估(Reliability evaluation)在美軍規格的定義是：「利用物品內的零件、機能、操作環境以及彼此間的相互關係等知識，評估該物品未來可靠度動向的技術」。

■ 5.2 靜態評估模式(Static evaluation model)

靜態模式是指「系統中任一組件的失效不影響其他組件的功能，亦即組件間失效爲彼此獨立」。

1. 串聯系統(Serial system)的可靠度
   (1) 定義：由獨立單元所連結而成的複雜系統，其中任一單元失效將會導致整個系統失效的組件連結方式。
   (2) 該系統的可靠度受其最弱單元可靠度的限制。

(3) 該系統的可靠度為各單元可靠度的乘積，亦即：$R_S = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_N$

(4) 若 R_S 保持不變，當組件數 N 越多時，則各組件可靠度必須提高，或說各組件的失效率必須相對降低。

(5) 若不採取補償措施，則當一系統的複雜度增加(亦即組件數增多)，其系統可靠度必然下降。

(6) 若各組件之可靠度相同為(R_C)，則：$R_S = (R_C)^N$。

若各組件之可靠度不相同，則組件之平均可靠度：$R_C = \sqrt[N]{R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_N}$，

亦即為幾何平均。

(7) 系統可靠度與串聯組件數的關係曲線

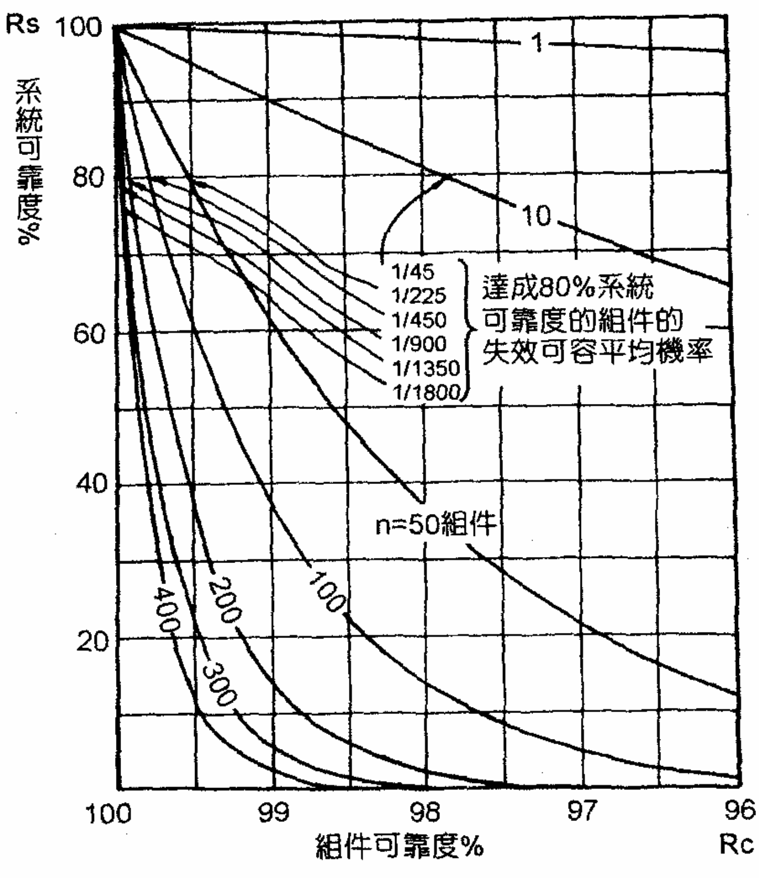


圖 5-1 系統可靠度與串聯組件數的關係曲線

例 5.1　某產品由三個組件串聯構成，其可靠度分別爲 0.92，0.95，0.96，求該產品之可靠度？

解　$R_S = R_1 \times R_2 \times R_3 = 0.92 \times 0.95 \times 0.96 = 0.839 = 83.9\%$

例 5.2　某產品由三個次系統串聯構成，次系統 1 由 20 個可靠度爲 0.99 的零件串聯而成；次系統 2 由 10 個可靠度爲 0.98 的零件串聯而成；次系統 3 由 30 個可靠度爲 0.999 的零件串聯而成。求該產品之可靠度？

解

$$R_S = 0.99^{20} \times 0.98^{10} \times 0.999^{30}$$
$$= 0.8179 \times 0.817 \times 0.97 = 0.648 = 64.8\%$$

例 5.3　某產品由四個組件串聯構成，其失效率分別爲 0.002，0.001，0.0025，0.0005。求該產品操作 100 小時之可靠度？

解

$$R_{100} = e^{-0.002\times100} \times e^{-0.001\times100} \times e^{-0.0025\times100} \times e^{-0.0005\times100}$$
$$= 0.8187 \times 0.9048 \times 0.7788 \times 0.9512 = 0.5488$$

例 5.4　假設某電路由 4 個電晶體(失效率 0.00001 次/小時)、10 個二極體(失效率 0.000002 次/小時)、20 個電阻(失效率 0.000001 次/小時)、10 個電容(失效率 0.000002 次/小時)串聯構成，求：

1. 該電路之 MTBF，
2. 該電路十小時內之可靠度？

解

1. $\sum \lambda = 4(0.00001) + 10(0.000002)$
   $+20(0.000001) + 10(0.000002) = 0.0001$

   $\mathrm{MTBF} = \dfrac{1}{0.0001} = 10{,}000(\text{小時})$
2. $R(10) = e^{-0.0001\times10} = 0.999$

2. 並聯系統(Parallel system)的可靠度

(1) 定義：僅當所有組件均失效時，系統方才失效的組件連結方式。又稱「主動複聯(Active redundancy)或熱複聯(Hot redundancy)」。

(2) 另有待命並聯系統(Standby parallel system)：系統中有多於一個具有相同機能的組件，當正在操作中的組件失效時，立即可由備用組件(Backup component)取代而維持系統於不失效的設計。又稱「被動複聯(Passive redundancy)或冷複聯(Cold redundancy)」。

(3) 兩組件並聯

a. 設 X 表組件可操作的事件，則系統可靠度可表示如下：

$$R=P(X_1\cup X_2)=P(X_1)+P(X_2)-P(X_1\cap X_2)=R_1+R_2-R_1\times R_2 \quad (5.1)$$

b. 設λ表組件之定值失效率，則系統可靠度可表示如下：

$$R(t)=e^{-\lambda_1 t}+e^{-\lambda_2 t}-e^{-\lambda_1 t}\times e^{-\lambda_2 t}=e^{-\lambda_1 t}+e^{-\lambda_2 t}-e^{-(\lambda_1 t+\lambda_2 t)} \quad (5.2)$$

c. $$\text{MTTF}=\int_0^\infty R(t)dt=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} \quad (5.3)$$

d. 若 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 則

$$R(t)=2e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t} \quad (5.4)$$

$$\text{MTTF}=\frac{2}{\lambda}-\frac{1}{2\lambda}=\frac{3}{2\lambda} \quad (5.5)$$

e. 若單一組件失效率爲定值λ，則二組件並聯系統之失效率 λ_s 可推導如下：

$$\because \lambda(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{1}{R(t)}\times\left[-\frac{d}{dt}R(t)\right],$$

由(5.4)式 $R(t)=2e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t}$，代入上式，得

$$\lambda_s(t)=\frac{1-e^{-\lambda t}}{1-0.5e^{-\lambda t}} \quad \text{......(5.6)}$$

失效率為定值之單一組件與二組件並聯系統之可靠度及失效率示於圖 5-2。由(5.6)式及圖 5-2 可知：

(a) 雖單一組件失效率為定值，但並聯系統之失效率卻為時間相依(Time dependent)。

(b) 並聯系統之失效率由零開始隨時間(t = 0 時 R = 1)逐漸遞增，與老化期之失效率曲線相似，其間差異有二：

(i) 並聯系統之失效率曲線為凹向下(Concave down)

(ii) 並聯系統之失效率曲線以定值失效率為漸進上限(Asymptotic upper-limit)

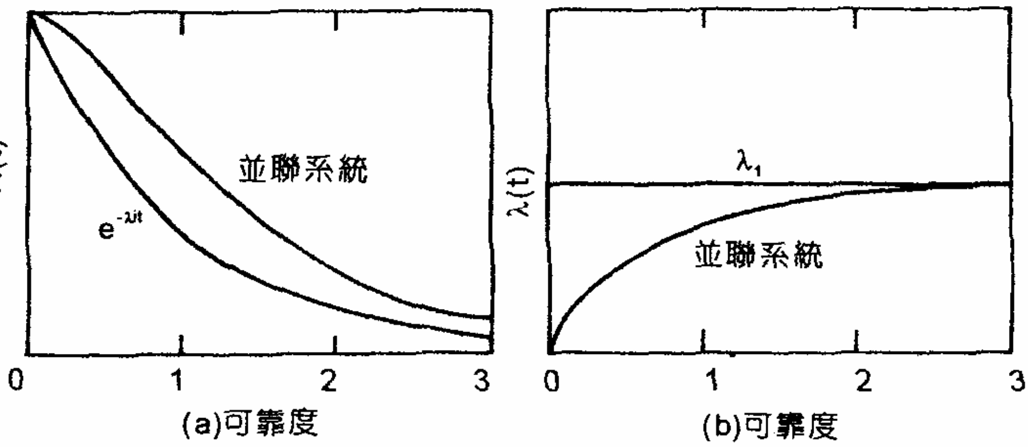


圖 5-2　單一組件與二組件並聯系統之可靠度及失效率

(4) 三組件並聯

a. $R(t)=1-(1-e^{-\lambda_1 t})\times(1-e^{-\lambda_2 t})\times(1-e^{-\lambda_3 t})$ ......(5.7)

b. $$\mathrm{MTTF}=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_2+\lambda_3}-\frac{1}{\lambda_3+\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \quad \text{......(5.8)}$$

c. 若$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$則

$$R(t)=1-(1-e^{-\lambda t})^3=3e^{-\lambda t}-3e^{-2\lambda t}-e^{-3\lambda t} \quad (5.9)$$

$$\text{MTTF}=\frac{3}{\lambda}-\frac{3}{2\lambda}+\frac{1}{3\lambda}=\frac{11}{6\lambda} \quad (5.10)$$

(5) n組件並聯

a. $R(t)=1-(1-e^{-\lambda_1 t})\times(1-e^{-\lambda_2 t})\times\cdots\cdots\times(1-e^{-\lambda_n t})$

$$=1-\prod_{i=1}^{n}(1-e^{-\lambda_i t}) \quad (5.11)$$

b. 若$\lambda_1=\lambda_2=\cdots\cdots=\lambda_n=\lambda$則

$$R(t)=1-(1-e^{-\lambda t})^n \quad (5.12)$$

$$\text{MTTF}=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{3\lambda}+\ldots+\frac{1}{n\lambda} \quad (5.13)$$

(6) 以二項展開式評估可靠度 $(p+q)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}p^{n-r}q^r$

設$p=1, q=(-R_i)$，則$(1-R_i)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^r(R_i)^r$

$\because\binom{n}{0}=1,\quad \therefore R(t)=1-(1-R_i)^n=\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}(-1)^{r-1}(R_i)^r$

若每一組件失效率可靠度均相同，則

$$R(t)=\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}(-1)^{r-1}(e^{-r\lambda t}) \quad (5.14)$$

$$\text{MTTF}=\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}(-1)^{r-1}(\frac{1}{r\lambda})=\int_0^{\infty}R(t)dt \quad (5.15)$$

(7) 系統可靠度與並聯組件數的關係曲線

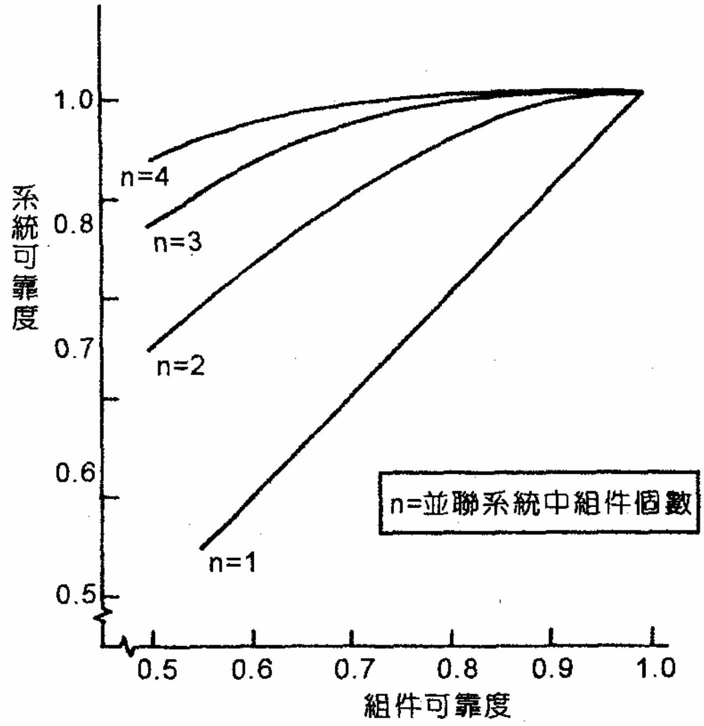


圖 5-3　系統可靠度與並聯組件數的關係曲線

例 5.5　某產品由三個組件並聯構成，其可靠度分別為 0.92，0.95，0.96，求該產品之可靠度？

解　$R_S = 1-(1-0.92)\times(1-0.95)\times(1-0.96) = 1-0.00016 = 99.984\%$

例 5.6　某產品由三個組件並聯構成，每組件均有定值失效率 0.01 次/小時，求：

1. 每組件的 MTTF，
2. 每組件十小時內之可靠度，
3. 該產品十小時內之可靠度，
4. 該產品的 MTTF？

解

1. $\text{MTTF}=\dfrac{1}{0.01}=100$(小時)
2. $R(10)=e^{-0.01\times 10}=0.905$
3. $R(10)=1-(1-e^{-0.01\times 10})^3=1-(1-0.905)^3=0.99914$
4. $\text{MTTF}=\dfrac{11}{6\lambda}=\dfrac{11}{6(0.01)}=183.33$(小時)

例 5.7 已知一有定值失效率系統的 MTTF，以及其終點壽命(End-of-life)可靠度爲 0.9。求：

1. 以 MTTF 表示該系統的設計壽命，
2. 若將兩個該系統主動複聯，則複聯系統的設計壽命爲原系統的幾倍？

解

1. $R=e^{-\lambda T}\Rightarrow T=\dfrac{1}{\lambda}\ln\left(\dfrac{1}{R}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{R}\right)\times\text{MTTF}$

$$=\ln\left(\frac{1}{0.9}\right)\text{MTTF}=0.105\,\text{MTTF}$$

2. 由(5.4)式：$R=2e^{-\lambda T}-e^{-2\lambda T}$，設 $X=e^{-\lambda T}$，則

$$X^2-2X+R=0 \quad\Rightarrow\quad X=\frac{2\pm\sqrt{4-4R}}{2}=1-\sqrt{1-R}$$

(因 $X\le 1$，故“+”號解不合)。

$$e^{-\lambda T}=1-\sqrt{1-R}\quad\Rightarrow\quad T=\ln\left(\frac{1}{1-\sqrt{1-R}}\right)$$

$$\text{MTTF}=\ln\left(\frac{1}{1-\sqrt{1-0.9}}\right)\text{MTTF}=0.380\,\text{MTTF}$$

兩者相比：$\dfrac{0.380\,\text{MTTF}}{0.105\,\text{MTTF}}=3.62$，複聯系統的設計壽命爲原系統的 3.62 倍。

例 5.8 某組件可靠度爲 0.7，求由 2, 3, 4 個該組件主動複聯之可靠度？

解　由(5.11)式，$R(2)=1-(1-0.7)^2=91\%$，
$R(3)=1-(1-0.7)^3=97.3\%$，$R(4)=1-(1-0.7)^4=99.2\%$
$\Rightarrow$　系統可靠度遞增，但邊際可靠度遞減。

例 5.9　欲將 MTTF 加倍，則須將幾個相同組件並聯？

解　由(5.15)式可得：$\dfrac{MTTF_n}{MTTF_1}=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\dfrac{n!}{r(n-r)!r!}$

$$\Rightarrow \frac{MTTF_2}{MTTF_1}=\frac{2!}{1(2-1)!1!}-\frac{2!}{2(2-2)!2!}=1\frac{1}{2}$$

$$\frac{MTTF_3}{MTTF_1}=\frac{3!}{1(3-1)!1!}-\frac{3!}{2(3-2)!2!}+\frac{3!}{3(3-3)!3!}=1\frac{5}{6}$$

$$\frac{MTTF_4}{MTTF_1}=\frac{4!}{1(4-1)!1!}-\frac{4!}{2(4-2)!2!}+\frac{4!}{3(4-3)!3!}-\frac{4!}{4(4-4)!4!}=2\frac{1}{12}$$

所以要至少 4 個相同組件並聯方可將 MTTF 加倍。

3.　串並聯系統

(1)　越多零件串聯系統可靠度越低，若由多於 20 個零件串聯而成的系統，其各零件可靠度須高於 0.95 系統才會有用。

(2)　越多零件並聯系統可靠度越高，若由多於 10 個零件並聯而成的系統，再加入並聯的零件對系統可靠度幾乎毫無影響，此謂達到「回收遞減點(Point of diminishing return)」。

(3)　提昇零件可靠度，串聯和並聯系統的可靠度均可提昇。故欲提昇系統可靠度時，提昇零件可靠度應比複聯優先考慮。

例 5.10 某系統有 100 個零件，分成 3 個組件。組件 2(由 20 個可靠度為 0.93 的零件串聯而成)與組件 3(由 60 個可靠度為 0.96 的零件串聯而成)並聯後再與組件 1(由 20 個可靠度為 0.95 的零件串聯而成)串聯，求該系統之可靠度？

解

$$R_1 = 0.95^{20} = 0.358$$

$$R_2 = 0.93^{20} = 0.234$$

$$R_3 = 0.96^{60} = 0.086$$

$$R = \left[1-(1-0.234)(1-0.086)\right]\times 0.358 = 0.1074$$

(4) 提昇系統可靠度可有下列方法：

a. 減少零件數

b. 簡化系統結構

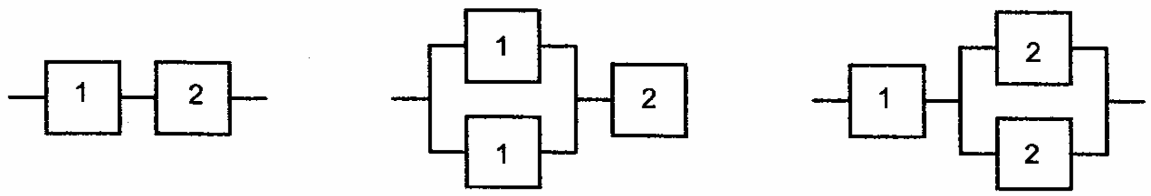
c. 提昇零件可靠度

d. 將零件經過「燒入」程序

該如何選擇，須視設備的本質、成本及任務等因素而定。

(5) 將可靠度低的組件複聯

現有可靠度分別為 R_1 及 R_2 的 1、2 兩組件串聯，如圖 5-4(a)所示，設串聯後之系統可靠度為 R_a，則 $R_a = R_1 \times R_2$。此時應複聯可靠度較高或較低之組件才可得到較高之複聯系統可靠度？設複聯組件 1(如圖 5-4(b))與複聯組件 2(如圖 5-4(c))後之複聯系統可靠度分別為 R_b 及 R_c，則 $R_b = (2 - R_1)R_1R_2$，$R_c = (2 - R_2)R_2$，兩者之差為 $R_b - R_c = R_1R_2(R_2 - R_1)$。所以若 $R_2 > R_1$ 則系統(b)較佳；若 $R_2 < R_1$ 則系統(c)較佳。故將可靠度較低的組件複聯，系統可得最大可靠度。

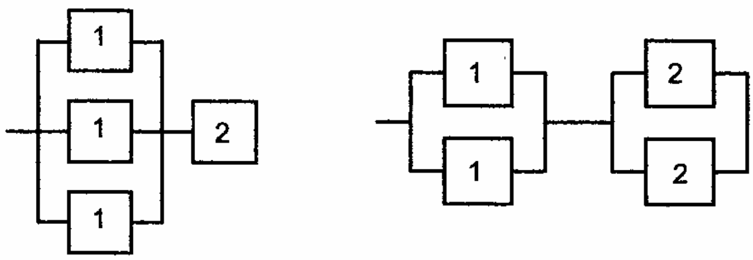


(a)　　(b)　　(c)

圖 5-4　將可靠度低或高的組件複聯比較

例 5.11　設 $R_1 = 0.7$，$R_2 = 0.95$。現欲將圖 5-4(b)系統之可靠度採增加一個組件之複聯方式提昇，問：應複聯 1 或複聯 2？

解



複聯 1 之系統可靠度 $= \left[1-(1-R_1)^3\right]R_2 = 0.973 \times 0.95 = 0.92435$

複聯 2 之系統可靠度 $= \left[1-(1-R_1)^2\right]\left[1-(1-R_2)^2\right]$

$$= 0.91 \times 0.9975 = 0.9077$$

⇒　當系統可靠度受一未複聯的低可靠度組件限制時，將較高可靠度組件複聯將是資源浪費。

(6)　高階複聯與低階複聯

a.　高階複聯指將系統並聯(如圖 5-5(a))，低階複聯指組件並聯(如圖 5-5(b))。

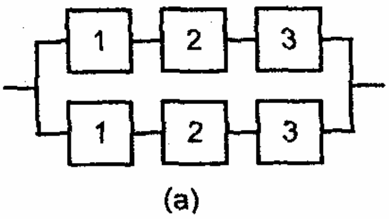


圖 5-5 高階複聯與低階複聯

高階複聯後的可靠度 $R_H = 1-(1-R_1R_2R_3)^2$

低階複聯後的可靠度 $R_L = (2R_1 - R_1^2)(2R_2 - R_2^2)(2R_3 - R_3^2)$

設 $R_1 = R_2 = R_3 = R$，則

$R_H = 2R^3 - R^6$，$R_L = (2R - R^2)^3$

$R_L - R_H = 6R^3(1-R)^2$

b. $\because (1-R) > 0,$ $\therefore$ 低階複聯可得到較高的系統可靠度。

例 5.12 設 $R_1 = R_2 = R_3 = 0.7$。請分別求圖 5-5 中之系統採高階複聯與低階複聯之可靠度？

解 $R_H = 2(0.7)^3 - (0.7)^6 = 0.568531$，$R_L = \left[2(0.7) - (0.7)^2\right]^3 = 0.753571$

(7) 稀有事件近似值(Rare-event approximation)

a. 因複聯系統係爲得到很高的可靠度，也就是很低的失效率，故失效在複聯系統中極少發生，可視爲稀有事件。

b. 將可靠度以泰勒級數(Taylor series)展開：

$$R(t) = e^{-\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-\lambda)^k t^k = 1 - \lambda t + \frac{1}{2}(\lambda t)^2 - \frac{1}{6}(\lambda t)^3 + \cdots\cdots$$

$\because \lambda t << 1$，$\therefore$ 僅取前兩項，則

$$R(t) \cong 1 - \lambda t \quad (5.16)$$

c. 採取(5.16)式之近似值，可得

(a) n 個組件串聯時之可靠度： $R(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t\right) \cong 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t$

(b) n 個組件並聯時之可靠度: $R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - e^{-\lambda_i t}\right) \cong 1 - \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i t)$

(c) n 個相同組件串聯時之可靠度： $R(t) \cong 1 - n\lambda t$

(d) n 個相同組件並聯時之可靠度： $R(t) \cong 1 - (\lambda t)^n$

例 5.13 系統結構如圖 5-6。設 $R_a = R_b$，$R_c = 1$，請以稀有事件近似值求系統之可靠度？

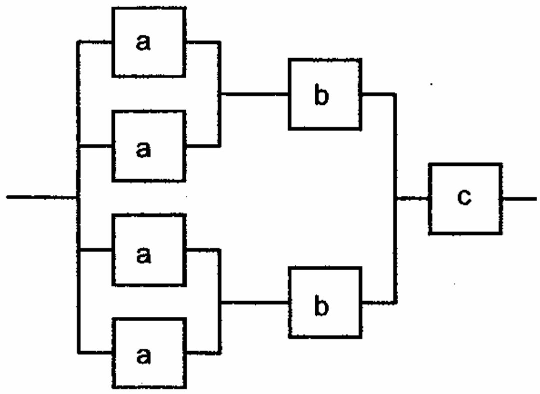


圖 5-6　例題 5.13 之系統方塊圖

解　將圖 5-6 合併如圖 5-7，則 $R_X = 2R - R^2$，

$R_Y = R_X \times R$，$R_Z = 2R_Y - R_Y^2$，　$R(t) = R_Z \times R_c$

$$\Rightarrow \quad R(t) = \left(2R - R^2\right)R\left[2 - \left(2R - R^2\right)R\right] \times 1$$

$$= 4R^2 - 2R^3 - 4R^4 + 4R^5 - R^6 \quad (5.17)$$

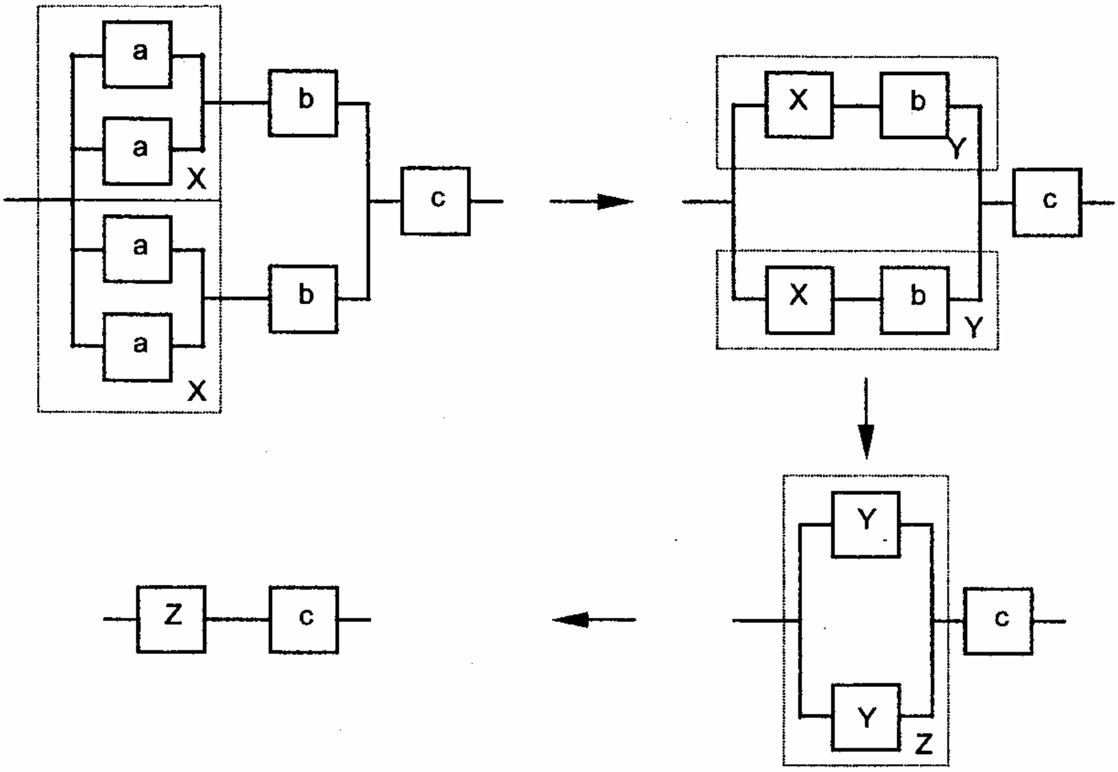


圖 5-7　圖 5-6 之合併圖

(1) 若取 $R(t)=e^{-\lambda t}\cong 1-\lambda t$，代入(5.17)，得

$$R(t)=4(1-\lambda t)^2-2(1-\lambda t)^3-4(1-\lambda t)^4+4(1-\lambda t)^5-(1-\lambda t)^6$$

(2) 若改取 $R^n=e^{-n\lambda t}\cong 1-n\lambda t+\frac{1}{2}n^2(\lambda t)^2$，代入(5.17)，得

$$\begin{aligned}R(t)&=4\left[1-2\lambda t+\frac{1}{2}2^2(\lambda t)^2\right]-2\left[1-3\lambda t+\frac{1}{2}3^2(\lambda t)^2\right]\\&\quad-4\left[1-4\lambda t+\frac{1}{2}4^2(\lambda t)^2\right]+4\left[1-5\lambda t+\frac{1}{2}5^2(\lambda t)^2\right]\\&\quad-\left[1-6\lambda t+\frac{1}{2}6^2(\lambda t)^2\right]=1-(\lambda t)^2\end{aligned}$$

(3) 討論：

a. 設 $\lambda=0.01$、$t=1$，代入(1)之結果得 $R(t)=0.999898$，代入(2)之結果得 $R(t)=0.9999$；

若設$\lambda = 0.001$、$t = 1$，代入(1)之結果得 $R(t) = 0.99999899$，
代入(2)之結果得 $R(t) = 0.999999$。

b.　若方法(2)僅取前兩項，i.e. $e^{-n\lambda t} \cong 1 - n\lambda t$，結果如何？

(4)　共同失效模式(Common-mode failure)

a.　由共同原因引起數個組件或整個系統失效的事件稱爲共同失效模式。

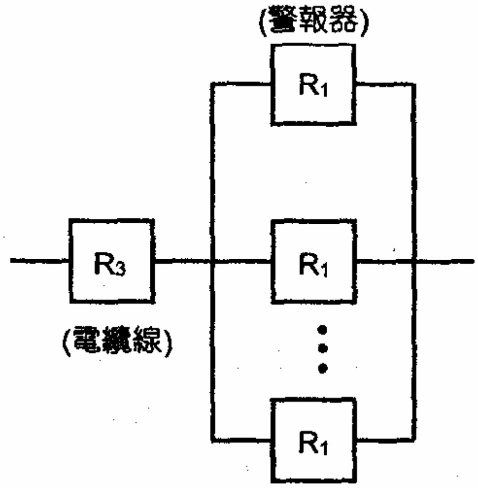


圖 5-8　共同失效模式示意圖

b.　設子系統由 n 個可靠度均爲 $R_1 = e^{-\lambda t}$ 的組件並聯而成，則該子系統之可靠度爲　$R_2 = 1 - (1 - R_1)^n$

c.　設該子系統與另一可靠度爲 $R_3 = e^{-\lambda_3 t}$ 之組件(共同失效模式)串聯而成一系統，則該系統之可靠度爲 $R = R_3 \times R_2 = R_3\left[1 - (1 - R_1)^n\right]$。

d　設每一組件之失效率均爲λ，其中 λ_I 爲獨立失效率，λ_C 爲共同模式失效率，則　$\lambda = \lambda_I + \lambda_C$

e.　設 $\beta = \dfrac{\lambda_C}{\lambda}$ 表 λ_C 在λ中所佔的比例

(a)　若 $n = 1$　$R = R_3 \times R_1 = e^{-\lambda_C t} \times e^{-\lambda_I t}$

故 R_1 指的是組件本身的可靠度，R 則是指共同模式加組件的可靠度。

(b) 若 $n=2$

$$R=R_3\times R_2=R_3\left[1-\left(1-R_1\right)^n\right]=R_3\left[1-\left(1-R_1\right)^2\right]$$

$$=e^{-\lambda_C t}\left[1-\left(1-e^{-\lambda_I t}\right)^2\right]=\left[2-e^{-(1-\beta)\lambda t}\right]e^{-\lambda t}$$

$$(\lambda_C=\beta\lambda,\quad \lambda_I=(1-\beta)\lambda)$$

(c) 若 $n=n$

$$R=R_3\times R_2=R_3\left[1-\left(1-R_1\right)^n\right]$$

$$=e^{-\lambda_C t}\left[1-\left(1-e^{-\lambda_I t}\right)^n\right]=e^{-\beta\lambda t}\left\{1-\left[1-e^{-(1-\beta)\lambda t}\right]^n\right\}$$

例 5.14 要求某型溫度感應器系統的設計壽命可靠度不低於 0.98，而已知一個感應器的可靠度只有 0.9。現工程師計劃將兩個感應器並聯，並聯後系統的可靠度應爲 0.99，則可合乎要求。但當進行可靠度測試時，該並聯系統的可靠度卻只有 0.97。經研究後推知此結果係由共同失效模式所造成，故打算由下列二方法改善之：

1. 於並聯系統中再並聯一感應器，
2. 降低共同失效模式的失效率。若感應器有定値失效率，求：
   (1) 共同失效模式的可靠度？
   (2) 該並聯系統代表共同失效模式的因子β？
   (3) 於並聯系統中再並聯一感應器是否能達到設計要求？
   (4) 若欲使兩個感應器並聯的系統即可符合可靠度要求，則代表共同失效模式的因子β應降低多少%？

解 (1) 設電纜線之可靠度爲 X，感應器之可靠度爲 Y，則

$$\left.\begin{array}{r}R_1=X\times Y=0.9\\ R_2=X\times\left[1-(1-Y)^2\right]=0.97\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}X=0.976\\ Y=0.9222\end{array},$$

共同失效模式的可靠度 $=0.976$

(2) $R = 0.97 = e^{-\lambda t} \Rightarrow \lambda t = -\ln(0.97) = 0.0304592$

$X = R_3 = 0.976 = e^{-\lambda_C t} \Rightarrow \lambda_C t = -\ln(0.976) = 0.0242927$

$$\beta = \frac{\lambda_C t}{\lambda t} = \frac{0.0242927}{0.0304592} = 0.79755$$

(3) $R = X \times \left[1-(1-Y)^3\right] = 0.976 \times \left[1-(1-0.9222)^3\right] = 0.975$，

故再並聯一感應器並不能達到設計要求。

(4) $R = \hat{X} \times \left[1-(1-0.9222)^2\right] = 0.98 = e^{-\hat{\lambda} t}$

$\hat{X} = 0.985968 = e^{-\hat{\lambda}_C t} \Rightarrow \hat{\lambda}_C t = -\ln(0.985968) = 0.01413138$

$\hat{\lambda} t = -\ln(0.98) = 0.020202707$

$$\beta = \frac{\hat{\lambda}_C t}{\hat{\lambda} t} = \frac{0.01413138}{0.020202707} = 0.69948$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\beta\% = \frac{0.69948 - 0.79755}{0.79755} \times 100\% = -12.30\%$$

例 5.15 若某組件的設計壽命可靠度爲 0.95，求：

1. 在無共同失效模式的前提下，兩組件並聯後的可靠度？
2. 若欲使(1)中之可靠度至少爲 0.99，則共同失效模式的因子β至多爲多少？

解

1. $R = \left[1-(1-0.95)^2\right] = 0.9975$

2. $X \times 0.9975 = 0.99 \Rightarrow X = 0.992482$

$e^{-\lambda_C t} = 0.992482 \Rightarrow \lambda_C t = 0.0075464$

$e^{-\lambda_I t} = 0.95 \Rightarrow \lambda_I t = 0.0512933$

$\lambda_C t + \lambda_I t = (\lambda_C + \lambda_I) t = \lambda t = 0.0588397$

$$\beta = \frac{\lambda_C t}{\lambda t} = \frac{0.0075464}{0.0588397} = 0.128$$

4. 鏈式結構(Linked configuration)

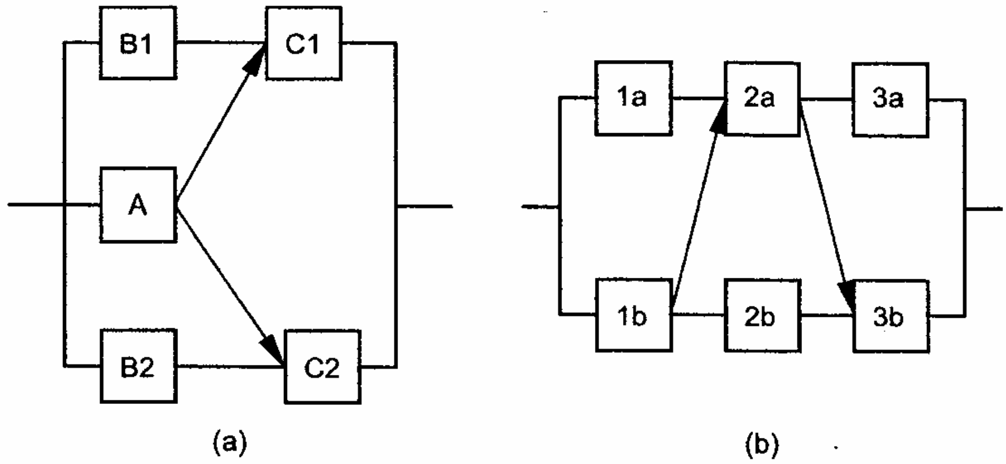


圖 5-9　鏈式結構系統之方塊圖

如圖 5-9 所示之例，無法用串並聯架構處理之系統。鏈式結構系統之可靠度評估有下列幾種方法可選擇。

(1) 眞值表法(Truth table method)

a. 設 R_A 爲組件 A 之可靠度，並以 1 表 A 可操作(其機率爲 R_A)以 0 表 A 失效(其機率爲 $1-1R_A=U_A$)，S 表系統可操作(其機率爲 R)以 F 表系統失效(其機率爲 $1-R=U$)。

b. 將 n 個組件的所有狀態(即眞值表)均列出，共有 2^n 個狀態。

c. 依系統結構判定每個狀態爲 S 或 F。

d. 將所有 S 狀態的機率相加即爲系統可靠度。

例 5.16 請以眞值表法求圖 5-9(a)系統之可靠度？

設 $R_A=0.3$，$R_{B1}=R_{B2}=0.1$，$R_{C1}=R_{C2}=0.2$

解

表 5-1　例題 5.16 之真值表

No.	B1	B2	C1	C2	A	F or S	Probability
1	0	0	0	0	0	F	
2	0	0	0	0	1	F	
3	0	0	0	1	0	F	
4	0	0	0	1	1	S	0.03888
5	0	0	1	0	0	F	
6	0	0	1	0	1	S	0.03888
7	0	0	1	1	0	F	
8	0	0	1	1	1	S	0.00972
9	0	1	0	0	0	F	
10	0	1	0	0	1	F	
11	0	1	0	1	0	S	0.01008
12	0	1	0	1	1	S	0.00432
13	0	1	1	0	0	F	
14	0	1	1	0	1	S	0.00432
15	0	1	1	1	0	S	0.00252
16	0	1	1	1	1	S	0.00108
17	1	0	0	0	0	F	
18	1	0	0	0	1	F	
19	1	0	0	1	0	F	
20	1	0	0	1	1	S	0.00432
21	1	0	1	0	0	S	0.01008
22	1	0	1	0	1	S	0.00432
23	1	0	1	1	0	S	0.00252
24	1	0	1	1	1	S	0.00108
25	1	1	0	0	0	F	
26	1	1	0	0	1	F	
27	1	1	0	1	0	S	0.00112
28	1	1	0	1	1	S	0.00048
29	1	1	1	0	0	S	0.00112
30	1	1	1	0	1	S	0.00048
31	1	1	1	1	0	S	0.00028
32	1	1	1	1	1	S	0.00012

將各個 S 狀態的機率依元件的失效與否計算出來，例如：

狀態 4：$S_4 = R_{C2} \times R_A \times U_{B1} \times U_{B2} \times U_{C1}$

$$= 0.2 \times 0.3 \times (1-0.1) \times (1-0.1) \times (1-0.2) = 0.03888$$

再將所有 S 狀態的機率加起來即為系統可操作的機率，亦即系統可靠度：$R = \sum_i P_{S_i} = 0.13572$

(2) 分解法(Decomposition method)或稱「完全機率法(Total probability method)」或「貝氏定理法(Bayes rule method)」。

a. 貝氏定理：若 X 事件發生的前提為 Y_1 或 Y_2 此二互斥事件之一發生，則 X 事件發生的機率為 $P(X) = P(X|Y_1)P(Y_1) + P(X|Y_2)P(Y_2)$。

b. 將系統中之關鍵組件(有最多 Input 與 Output 之組件)設為上述貝氏定理中之 Y，其可操作設為 Y_1，失效設為 Y_2。

c. 由系統結構分別求出當 Y_1 發生及 Y_2 發生時，系統為 F 的機率 $P(X)$。

d. $1 - P(X)$即為系統可靠度。(或是直接求當 Y_1 發生及 Y_2 發生時，系統為 S 的機率)

e. (a) Bayes Rule

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) \quad \Rightarrow \quad P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

$$\Rightarrow \quad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

(b) Total Probability Theorem

If B_1, B_2, $\cdots\cdots$, B_n, are mutually exclusive, collectively exhaustive events, the probability of another event A is

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \times P(B_i)$$

(c) Generalized Bayes Rule

Combining Bayes Rule and Total Probability Theorem yields

$$P\left(B_j \middle| A\right) = \frac{P\left(A \middle| B_j\right) \times P\left(B_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(A \middle| B_j\right) \times P\left(B_j\right)}$$

例 5.17 請以貝氏定理法求圖 5-9(a)系統之可靠度？

設 $R_A = 0.3$，$R_{B1} = R_{B2} = 0.1$，$R_{C1} = R_{C2} = 0.2$

解

1. 選 A 爲關鍵組件，故 Y_1 代表 A 可操作、Y_2 代表 A 失效。
2. Y_1 時須 C1 與 C2 同時失效系統才會失效，故
   $P\left(X \middle| Y_1\right) = \left(1 - R_{C1}\right)\left(1 - R_{C2}\right)$
3. Y_2 時須(B1 至 C1)與(B2 至 C2)同時失效系統才會失效，故
   $P\left(X \middle| Y_2\right) = (U_{B1} \cup U_{C1}) \cap (U_{B2} \cup U_{C2}) = (1 - R_{B1}R_{C1})(1 - R_{B2}R_{C2})$
4. $P(X) = P\left(X \middle| Y_1\right)P(Y_1) + P\left(X \middle| Y_2\right)P(Y_2)$

   $= [(1 - R_{C1})(1 - R_{C2})]R_A + [(1 - R_{B1}R_{C1})$
   $(1 - R_{B2}R_{C2})](1 - R_A) =$ 系統失效機率
5. $R = 1 - P(X) = 1 - \left[(1-0.2)(1-0.2)\right]$
   $\times 0.3 + \left[(1-0.02)(1-0.02)\right] \times 0.7 = 0.13572$

(3) 裴氏網路法(Petri net method)

裴氏網路(Petri nets)是一種通用型的數學工具，用以描述事件與條件間的關係。裴氏網路的基本符號包括：

○ ：位置(Place)，以一圓圈表示，代表事件

── ：立即變遷(Immediate transition)，以一細棒表示，代表事件轉移時無時間延遲

▬ : 時延變遷(Timed transition)，以一粗棒表示，代表事件轉移時有時間延遲

↑ : 弧(Arc)，以一箭頭表示，介於位置與變遷中間

● : 標記(Token)，以一圓點表示，含於位置中，代表資料

: 禁止弧(Inhibit arc)，以一圓圈與一直線表示，介於位置與變遷中間

如果輸入位置滿足了使能(Enable)條件，則變遷可發射(Fire)。變遷發射會使變遷之每一個輸入位置移出一個標記，並放入一個標記至其每一個輸出位置中。以裴氏網路表示事件間邏輯關係的基本結構示於圖 5-10，其中 P、Q、R 分別代表不同的事件。圖中變遷之輸入位置可分為既定型和條件型兩類。既定型只有一個輸出弧，而條件型之輸出弧則有多個。在既定型位置中之標記僅有一個去處，也就是說如果該位置擁有一個標記，在變遷發射後，將使得該變遷之每一輸出位置均獲得一個標記。然而在條件型中的標記因有多個出路，故會依條件將系統導引至不同的狀況。以圖 5-10 中「TRANSFER OR」的裴氏網路為例，是 Q 或是 R 位置會由 P 位置取得一個標記，將視例如：機率、外界動作、或內部狀況等條件而定。另依耗時情形可將變遷分為三類：轉移過程沒有任何時間延遲的變遷稱為立即變遷，而延遲時間為常數者稱為時延變遷。第三類稱為隨機變遷(Stochastic transistion)，是用來模擬時間延遲為隨機的程序。裴氏網路對於系統建模(System modeling)失效分析及預防維護甚為有用。

Logic relation	TRANSFER	AND	OR	TRANSFER AND	TRANSFER OR	INHIBITION
Description	If P then Q	If P AND Q then R	If P OR Q then R	If P then Q AND R	If P then Q OR R	If P AND Q' then R
Boolean function	Q=P	R=P*Q	R=P+Q	Q=R=P	Q+R=P	R=P*Q'
Petri nets						

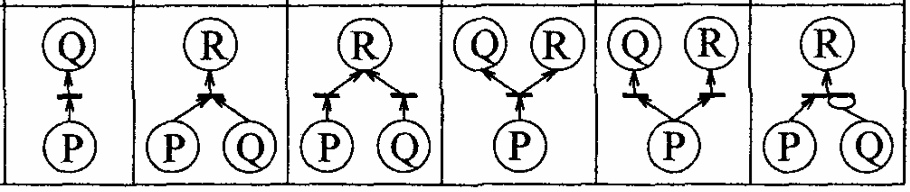


圖 5-10　以裴氏網路表示事件間邏輯關係的基本結構

以裴式網路評估系統可靠度的方法以及與其他常用方法的比較，請參考附錄 A。

5. m-out-of-n(m/n)系統

m/n 系統指在 n 個單元中須有 m 個單元可操作系統方可操作的系統。

(1) 各單元之可靠度均相等

a. 設 $R_1=R_2=\cdots\cdots=R_n=R$，且失效機率 $p=1-R$，失效個數爲 N，則 n 個單元中有 i 個單元失效的機率爲

$$P(N=i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\ 。$$

b. m/n 系統可操作指失效單元數不得多於$(n-m)$個，其機率即爲其可靠度

$$R_{m/n}=P(N\le n-m)=\sum_{i=0}^{n-m}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$$

$$=1-\sum_{i=n-m+1}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\ 。\qquad\text{(5.18)}$$

c. 其失效的機率爲

$$p_{m/n}=P(N>n-m)=\sum_{i=n-m+1}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$$

$$=1-\sum_{i=0}^{n-m}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\ 。$$

d. 若失效機率很低(或說可靠度很高)，i.e. $p\ll1$，則$(1-p)^{n-i}\approx1$，可靠度可改寫成：$R_{m/n}\approx\sum_{i=0}^{n-m}\binom{n}{i}p^i\approx1-\sum_{i=n-m+1}^{n}\binom{n}{i}p^i$。然而當次冪 i 增大時，$p^i\approx0$，故可靠度可再改寫成：

$$R_{m/n}\approx1-\binom{n}{n-m+1}p^{n-m+1}\ 。$$

e. 其失效的機率亦可再改寫為：$p_{m/n} \approx \binom{n}{n-m+1} p^{n-m+1}$。

設失效率為定值 λ 則 $p = 1 - R = 1 - e^{\lambda t}$，若為稀有事件則 $p = 1 - R = 1 - e^{\lambda t} = 1 - (1 - \lambda t) = \lambda t$，失效的機率可再改寫為：

$p_{m/n} \approx \binom{n}{n-m+1} (\lambda t)^{n-m+1}$。

(2) m-out-of-n failed 系統：指在 n 個單元中若有 m 個單元失效則系統方失效的系統。

(3) Consecutive m-out-of-n 系統：指在 n 個單元中須有 m 個單元可操作(失效)系統方可操作(失效)的系統，但此 m 個單元有接連順序的排列關係(Consecutively ordered)。

例 5.18 某通訊系統有四個波道，其中任三個波道可操作則系統可操作，求該系統之可靠度。

解 設 x_1、x_2、x_3、及 x_4 分別代表該四個波道可操作的事件，則系統可靠度為

$$
\begin{aligned}
R &= (x_1 \cap x_2 \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2 \cap x_4) \cup (x_1 \cap x_3 \cap x_4) \\
&\quad \cup (x_2 \cap x_3 \cap x_4) \cup (x_1 \cap x_2 \cap x_3 \cap x_4) \\
&= P(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \\
&= P(x_1x_2x_3) + P(x_1x_2x_4) + P(x_1x_3x_4) + P(x_2x_3x_4) \\
&\quad - 6P(x_1x_2x_3x_4) + 4P(x_1x_2x_3x_4) - P(x_1x_2x_3x_4) \\
&= P(x_1x_2x_3) + P(x_1x_2x_4) + P(x_1x_3x_4) + P(x_2x_3x_4) - 3P(x_1x_2x_3x_4)
\end{aligned}
$$

若每個波道的可靠度均相等為 $q(q = 1 - p)$則 $R = 4q^3 - 3q^4$

另解：

由(5.18)式：$R_{3/4} = P(N \le 4 - 3) = \sum_{i=0}^{4-3} \binom{4}{i} p^i (1-p)^{4-i}$

$$=1-\sum_{i=4-3+1}^{4}\binom{4}{i}p^i(1-p)^{4-i}$$ 或寫成

$$R_{3/4}=\sum_{i=3}^{4}\binom{4}{i}q^i(1-q)^{4-i}=\binom{4}{3}q^3(1-q)^1+\binom{4}{4}q^4(1-q)^0=4q^3-3q^4$$

6. 安全失效與危險失效

   a. 依系統之作動時機正確與否可將失效分成危險失效與安全失效兩種。

   b. 以汽車安全氣囊(Airbag)爲例，危險發生該爆發而未爆發之失效稱「危險失效(Fail-to-danger)」，反之危險未發生不該爆發而爆發之失效稱「安全失效(Fail-safe)」。

   c. 複聯方式通常係爲降低危險失效，但安全失效機率會隨複聯數增加而上升。

   d. 在 1/n(1-out-of-n)並聯系統中以 p_d 及 p_s 分別代表危險失效及安全失效發生的機率則：

      該系統發生危險失效的機率：$p_{(1/n),d}=(p_d)^n$

      該系統發生安全失效的機率：$p_{(1/n),s}=1-(1-p_s)^n$

      (n 個元件中任一發生即發生)

   e. 在 m/n 並聯系統中

      該系統發生危險失效的機率：

$$p_{(m/n),d}=P(N>n-m)=\sum_{i=n-m+1}^{n}\binom{n}{i}{p_d}^i(1-p_d)^{n-i}\approx\binom{n}{n-m+1}{p_d}^{n-m+1}$$

      該系統發生安全失效的機率：

$$p_{(m/n),s}=P(N\ge m)=\sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}{p_s}^i(1-p_s)^{n-i}\approx\binom{n}{m}{p_s}^m$$

   f. m 固定時，n 愈大系統發生危險失效的機率愈低，但系統發生安全失效的機率愈高。但 n 太大時共同失效模式會大幅限制危險失效機率的改善。反之，n 固定時，m 愈大系統發生危險失效的機率愈高，但系統發生安全失效的機率愈低。

例 5.19 某可靠度工程師受命設計一 m/n 系統，已知每一組件之危險失效及安全失效機率分別爲 $p_d = 10^{-2}$，$p_s = 10^{-2}$。爲降低成本 n 必須爲最小，且要求系統發生危險失效的機率須低於 10^{-4}，系統發生安全失效的機率須低於 10^{-2}。求 n 及 m 值。

解

m/n	該系統發生安全失效的機率 $P \approx \binom{n}{m} p_s^{m}$	該系統發生危險失效的機率 $P \approx \binom{n}{n-m+1} p_d^{n-m+1}$
1/1	10^{-2}	10^{-2}
1/2	2×10^{-2}	10^{-4}
2/2	10^{-4}	2×10^{-2}
1/3	3×10^{-2}	10^{-6}
2/3	3×10^{-4}	3×10^{-4}
3/3	10^{-6}	3×10^{-2}
1/4	4×10^{-2}	10^{-8}
◎ 2/4	6×10^{-4}	4×10^{-6}
3/4	4×10^{-6}	6×10^{-6}
4/4	10^{-8}	4×10^{-2}

$N = 4$，$m = 2$，即 2/4 系統可滿足要求。

■ 5.3 可靠度配當(Reliability allocation)

一產品的可靠度確定後，該如何分配到組成該產品之各分項，以達成系統可靠度的要求稱爲可靠度配當。

1. 考慮因素
   (1) 產品架構之複雜性
   (2) 組件之重要性或關鍵性
   (3) 產品之安全性
   (4) 使用環境條件

(5) 維修便易性(進手)

(6) 成本

(7) 產品未來發展性

(8) 工程水準

2. 常用配當法

(1) 等量配當法

a. 將各分項之可靠度均視爲相同的配當法，適用於對各分項可靠度之影響因素尚未了解時所作的初步配當。

b. $R_S = R_1 \times R_2 \times \cdots\cdots \times R_n = (R_i)^n \quad \Rightarrow \quad R_i = \sqrt[n]{R_S}$

其中 R_S：系統可靠度，

R_i：第 i 分項可靠度配當值。

例 5.20 設某產品由五個分項串聯而成，若該產品的可靠度目標爲 0.95，請以等量配當法求各分項之可靠度。

解 $R_i = \sqrt[n]{R_S} = \sqrt[5]{0.95} = 0.9898$

(2) ARINC 配當法

a. 由美國航空無線電公司(Aeronautical Radio Incorporation, ARINC)於 1958 年所發表的方法。

b. 假設：

(a) 各分項爲串聯

(b) 各分項之任務時間與系統之任務時間相同

(c) 失效率爲常數

$$R_i = (R_S)^{W_i}, \quad W_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

W_i：第 i 分項之權重(Weighting factor)

λ_i：第 i 分項之失效率

例 5.21 設某產品由五個分項串聯而成，若該產品的可靠度目標為 0.998，請以ARINC法求各分項之可靠度。設任務時間 $t = 1000h$，且 $\lambda_1 = 0.0001$ 次/h，$\lambda_2 = 0.0002$ 次/h，$\lambda_3 = 0.0003$ 次/h，$\lambda_4 = 0.0004$ 次/h，$\lambda_5 = 0.0005$ 次/h。

解

$$\bar{\lambda}_{1,1000h} = 0.0001 \times 1000 = 0.1(\text{次/h})，$$

$$\bar{\lambda}_{2,1000h} = 0.0002 \times 1000 = 0.2(\text{次/h})，$$

$$\bar{\lambda}_{3,1000h} = 0.0003 \times 1000 = 0.3(\text{次/h})，$$

$$\bar{\lambda}_{4,1000h} = 0.0004 \times 1000 = 0.4(\text{次/h})，$$

$$\bar{\lambda}_{5,1000h} = 0.0005 \times 1000 = 0.5(\text{次/h})，$$

$$\sum_{i=1}^{5} \bar{\lambda}_{i,1000h} = 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 = 1.5\,(\text{次/h})。$$

$$W_1 = \frac{0.1}{1.5} = 0.0667 \quad \Rightarrow \quad R_1 = (0.998)^{0.0667} = 0.99987$$

$$W_2 = \frac{0.2}{1.5} = 0.1333 \quad \Rightarrow \quad R_2 = (0.998)^{0.1333} = 0.99973$$

$$W_3 = \frac{0.3}{1.5} = 0.2000 \quad \Rightarrow \quad R_1 = (0.998)^{0.2000} = 0.99960$$

$$W_4 = \frac{0.4}{1.5} = 0.2667 \quad \Rightarrow \quad R_1 = (0.998)^{0.2667} = 0.99947$$

$$W_5 = \frac{0.5}{1.5} = 0.3333 \quad \Rightarrow \quad R_2 = (0.998)^{0.3333} = 0.99933$$

(3) AGREE 配當法

由美國 AGREE 於 1958 年所發表的方法。

考慮分項之複雜性(零件數)及關鍵性(重要性)。

$$R_i(t_i)=e^{-\lambda_i \times t_i}\ ,\ \lambda_i=\frac{n_i\left[-\ln\left(R_S\right)\right]}{N\times C_i\times t_i}$$

其中 R_S：系統可靠度

N：零件總數

n_i：第 i 分項之零件數

C_i：第 i 分項之關鍵因子

t_i：第 i 分項之任務時間

R_i：第 i 分項之可靠度

例 5.22 某產品有四個分項，要求連續使用 10 小時的可靠度目標爲 0.95，請以 AGREE 法求各分項之可靠度。設第一及第三分項爲關鍵分項，第二分項任務時間爲 9 小時，關鍵因子爲 0.95；第四分項任務時間爲 8 小時，關鍵因子爲 0.9。各分項之零件數：$n_1=30$，$n_2=100$，$n_3=50$，$n_4=80$。

解

$$N=30+100+50+80=260$$

$$\lambda_1=\frac{30\left[-\ln(0.95)\right]}{260\times1\times10}=5.918\times10^{-4}(\text{次/小時})，\quad R_1(10)=e^{-\lambda_1\times10}=0.9941$$

$$\lambda_2=\frac{100\left[-\ln(0.95)\right]}{260\times0.95\times9}=23.074\times10^{-4}(\text{次/小時})，\quad R_2(9)=e^{-\lambda_2\times10}=0.97945$$

$$\lambda_3=\frac{50\left[-\ln(0.95)\right]}{260\times1\times10}=9.864\times10^{-4}(\text{次/小時})，\quad R_3(10)=e^{-\lambda_3\times10}=0.99018$$

$$\lambda_4=\frac{80\left[-\ln(0.95)\right]}{260\times0.9\times8}=21.92\times10^{-4}(\text{次/小時})，\quad R_4(8)=e^{-\lambda_4\times8}=0.98262$$

(4) 評點(Rating)配當法

a. 由多位有經驗人員給予每個分項 1~10 的評點，再整合所有人員評點的結果，給予該分項一個配當評點。

b. 平均評點：

$$\text{可靠度：} R_i = 1-(1-R_S)\times\left\{\frac{\prod_{j=1}^{M}\left[\frac{\sum_{k=1}^{N} Z_{ijk}}{N}\right]}{\sum_{i=1}^{L}\left[\prod_{j=1}^{M}\left(\frac{\sum_{k=1}^{N} Z_{ijk}}{N}\right)\right]}\right\}$$

其中 N ：參與評定人員數

L ：分項數

M ：每分項的影響因子數

$Zijk$ ：第 k 位專家對第 i 分項的第 j 個影響因子所給的評點數

R_i ：第 i 分項的可靠度

R_S ：系統的可靠度

$$\text{失效率：} \lambda_i = \left\{\frac{\sum_{j=1}^{M}\left[\frac{\sum_{k=1}^{N} Z_{ijk}}{N}\right]}{\sum_{i=1}^{L}\left[\prod_{j=1}^{M}\left(\frac{\sum_{k=1}^{N} Z_{ijk}}{N}\right)\right]}\right\}\times\lambda_S$$

c. 乘法評定評點：

$$W_i = \frac{\prod_{j=1}^{m} Z_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} Z_{ij}} \text{，} \lambda_i = W_i \times \lambda_S$$

d.　加法評定評點：

$$W_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} Z_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Z_{ij}}\text{，}\lambda_i = W_i \times \lambda_S$$

3.　串並聯系統可得最大可靠度之元件配置法

設一串並聯系統由 n 個次系統串聯而成，且每一次系統由 m 個元件並聯而成，如圖 5-11 所示。

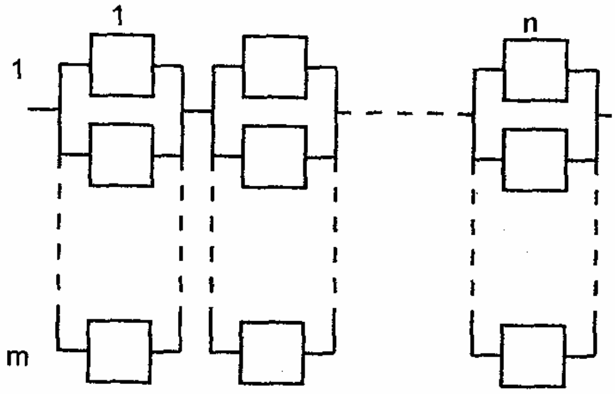


圖 5-11　串並聯系統的方塊圖

設

K_i：第 i 個次系統，$i = 1, 2, \ldots, n$

$u = n \times m$，代表該系統之元件總數

C_j：第 j 個元件，$j = 1, 2, \ldots, u$

P_j：C_j 可操作的機率(i.e. C_j 的可靠度)

則該系統之可靠度 R 可表示為　$R = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \prod_{j \in K_i}\left(1 - P_j\right)\right)$

由串並聯架構之特性可知：盡量使每一次系統之可靠度相等則可使該系統得最大可靠度。Baxter 與 Harche(1992)提出一由上而下(Top Down Heuristic, TDH)的元件配置法，其步驟如下：

a. 將所有元件按可靠度由高到低排列，亦即$P_1 \geq P_2 \geq \cdots\cdots \geq P_u$

b. 將可靠度最高之前 n 個元件(C_j，$j = 1, 2, \cdots\cdots, n$)依序配置給該 n 個次系統(K_i，$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$)；亦即配置每個次系統之第一個元件。

c. 將 C_j配置給 K_{2n+1-j}，$j = n+1, \cdots\cdots, 2n$；亦即配置每個次系統之第二個元件。

d. 設$\nu = 2$

e. 評估$R_i^{(\nu)} = \left(1 - \prod_{j \in K_i}(1 - P_j)\right)$，$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$，

若$R_i^{(\nu)}$是第 j 小(jth smallest, j =1, 2, …… , n)，則將 $C_{\nu n+i}$配置給 K_i。

f. 如果$\nu < m$ 則設$\nu = \nu + 1$ 且重複步驟 e。若$\nu = m$ 則停止。

例 5.23 某產品有六個阻值相同且可互換的電阻，可靠度分別爲 0.95，0.75，0.85，0.65，0.40，0.55。因空間的限制，該六個電阻必須(3，2)排列，亦即兩組串聯且每組有三電阻並聯。

1. 請以 TDH 法配當此系統，
2. 請以 BUH(Bottom-up heuristic)法配當並與(1)之結果比較。

解 步驟 a：將元件依可靠度排列如下：0.95，0.85，0.75，0.65，0.55，0.40

步驟 b：將 C_1配置給 K_1，C_2配置給 K_2。

步驟 c：將 C_3配置給 K_2，C_4配置給 K_1。

步驟 d：設$\nu = 2$。

步驟 e：分別計算 K_1及 K_2次系統的可靠度：

$$R_1^{(2)} = 1-(1-0.95)(1-0.65) = 0.9825$$

$$R_2^{(2)} = 1-(1-0.85)(1-0.75) = 0.9625$$

因爲$R_2^{(2)} < R_1^{(2)}$，所以將 C_5配置給 K_2，將 C_6配置給 K_1。

步驟 f：$\nu = 3 = m$，所以停止。

配置的結果爲

次系統 K_1	次系統 K_2
C_1	C_2
C_4	C_3
C_6	C_5

可靠度 $R_{TDH}=\left[1-(1-0.95)(1-0.65)(1-0.40)\right]$

$$\left[1-(1-0.85)(1-0.75)(1-0.55)\right]=0.972802$$

若改採 BUH 之方法則配置的結果爲

次系統 K_1	次系統 K_2
C_6	C_5
C_3	C_4
C_2	C_1

可靠度 $R_{BUH}=\left[1-(1-0.40)(1-0.75)(1-0.85)\right]$

$$\left[1-(1-0.55)(1-0.65)(1-0.95)\right]=0.9698$$

通常 R_{TDH} 會高於 R_{BUH}。

■ 5.4 動態評估模式(Dynamic evaluation model)

動態模式是指對「狀態會隨時間而變化的系統」進行可靠度評估的模式。

1. 馬可夫過程(Markov process)
   (1) 馬可夫狀態(State)：系統的組件呈操作或失效的組合情形。
   (2) 一系統有 n 個組件則有 2^n 個馬可夫狀態。
   (3) 設一系統有 a、b、c 三組件，則該系統有 8 個馬可夫狀態如表 5-2。

表 5-2 三組件之 8 個馬可夫狀態表

組件	狀態編號							
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	O	F	O	O	F	F	O	F
b	O	O	F	O	F	O	F	F
c	O	O	O	F	O	F	F	F

O：Operational，F：Failed

系統於某狀態下是否失效須視元件間組合的架構而定。若該系統爲串聯，則於表 5-2 中之狀態#2~#8 該系統均爲失效；若該系統爲並聯，則僅狀態#8 時該系統爲失效；若爲 a、b 並聯後再與 c 串聯，則狀態#4~#8 該系統均爲失效。

(4) 設系統於時間 t 時爲狀態 i 的機率爲 $P_i(t)$，則系統之可靠度爲 $R(t)=\sum_{i\in O}P_i(t)$，亦即將所有可操作狀態之機率相加。或 $R(t)=1-\sum_{i\in F}P_i(t)$。

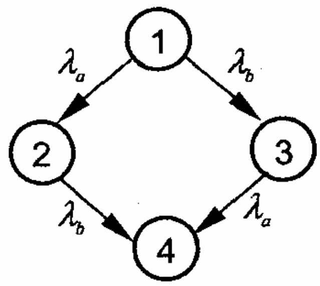
(5) $P_1(0)=1$，且 $P_i(0)=0 \quad \forall\, i\neq 1$(起始狀態一定是狀態#1)；$\sum_i P_i(t)=1$ (任一時間系統僅能有一個狀態)。

2. 二獨立組件之可靠度分析

(1) 二獨立組件共有四個馬可夫狀態(如圖 5-12(a)所示)，狀態間的轉移如圖 5-12(b)所示。其中狀態#1 只出不進，稱爲吐出狀態(Spitting state)；而狀態#4 只進不出，稱爲吸收狀態(Absorbing state)。

組件	狀態編號			
	1	2	3	4
a	O	F	O	F
b	O	O	F	F

(a)



(b)

圖 5-12　二獨立組件的四個馬可夫狀態及狀態轉移圖

(2) $\because \lambda(t)=\dfrac{P(T<t+\Delta t|T>t)}{\Delta t}$ 爲在 $T>t$ 之前提下，將失效發生在 $T<t+\Delta t$ 的機率平均分配在時間 Δt 內所得的失效率，$\therefore \lambda(t)\Delta t=P(T<t+\Delta t|T>t)$ 爲在 $T>t$ 之前提下，失效發生在 $T<t+\Delta t$ 的機率。故 $\lambda_a \Delta t P_1(t)$ 爲在 Δt 時間內系統由狀態#1 轉移至狀態#2 的轉移率(Transition rate)。同理，在 Δt 時間內系統由狀態#1 轉移至狀態#3 的轉移率爲 $\lambda_b \Delta t P_1(t)$。現定義移出之機率爲負、移入之機率爲正，故於狀態#1 之狀態移轉機率可表示爲

$$P_1(t+\Delta t)-P_1(t)=-\lambda_a \Delta t P_1(t)-\lambda_b \Delta t P_1(t)$$

或

$$\frac{d}{dt}P_1(t)=-\lambda_a P_1(t)-\lambda_b P_1(t) \qquad (5.19)$$

上式即稱爲狀態#1 之狀態移轉方程式(State transition equation)。

同理可得

$$\frac{d}{dt}P_2(t)=\lambda_a P_1(t)-\lambda_b P_2(t) \qquad (5.20)$$

$$\frac{d}{dt}P_3(t)=\lambda_b P_1(t)-\lambda_a P_3(t) \qquad (5.21)$$

$$\frac{d}{dt}P_4(t)=\lambda_b P_2(t)+\lambda_a P_3(t) \qquad (5.22)$$

(3) 由(5.19)式可解得狀態#1 之機率爲

$$P_1(t)=e^{-(\lambda_a+\lambda_b)t} \qquad (5.23)$$

將(5.23)式代入(5.20)式得

$$\frac{d}{dt}P_2(t)+\lambda_b P_2(t)=\lambda_a e^{-(\lambda_a+\lambda_b)t}$$

解得狀態#2 之機率為

$$P_2(t)=e^{-(\lambda_b)t}-e^{-(\lambda_a+\lambda_b)t} \quad\text{......} (5.24)$$

同理狀態#3 之機率為

$$P_3(t)=e^{-(\lambda_a)t}-e^{-(\lambda_a+\lambda_b)t} \quad\text{......} (5.25)$$

因此，狀態#4 之機率為

$$P_4(t)=1-\sum_{i=1}^{3}P_i(t)=1-e^{-(\lambda_a)t}-e^{-(\lambda_b)t}+e^{-(\lambda_a+\lambda_b)t} \quad\text{......} (5.26)$$

(4) 若該二組件為串聯，則 $R(t)=\sum_{i\in O}P_i(t)=P_1(t)=e^{-(\lambda_a+\lambda_b)t}$

若該二組件為並聯，則 $R(t)=1-\sum_{i\in F}P_i(t)1-P_4(t)$

$$=e^{-(\lambda_a)t}+e^{-(\lambda_b)t}-e^{-(\lambda_a+\lambda_b)t}$$

3. 被動複聯系統的可靠度分析

(1) 不考慮切換裝置的失效

假設切換裝置不會失效，僅只考慮主要組件(Primary unit)a 及備用組件(Backup unit)b 會失效的理想狀況。此時之馬可夫狀態及狀態轉移如圖 5-13 所示。

組件	狀態編號			
	1	2	3	4
a	O	F	O	F
b	O	O	F	F

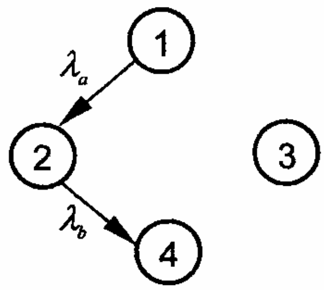


圖 5-13 不考慮切換裝置失效的馬可夫狀態及狀態轉移圖

a.　假設備用組件於備用狀態不會失效，亦即備用組件不會在主要組件失效之前發生失效，故 $P_3(t)=0$。

b.　三個狀態轉移方程式如下：

$$\frac{d}{dt}P_1(t)=-\lambda_a P_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_2(t)=\lambda_a P_1(t)-\lambda_b P_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_4(t)=\lambda_b P_2(t)$$

解得各狀態之機率為

$$P_1(t)=e^{-(\lambda_a)t}$$

$$P_2(t)=\frac{\lambda_a}{\lambda_b-\lambda_a}[e^{-(\lambda_a)t}-e^{-(\lambda_b)t}]$$

$$P_4(t)=1-\frac{1}{\lambda_b-\lambda_a}[\lambda_b e^{-(\lambda_a)t}-\lambda_a e^{-(\lambda_b)t}]$$

故該系統之可靠度為

$$R(t)=\sum_{i\in O}P_i(t)=P_1(t)+P_2(t)=e^{-(\lambda_a)t}+\frac{\lambda_a}{\lambda_b-\lambda_a}[e^{-(\lambda_a)t}-e^{-(\lambda_b)t}]$$

$$=\frac{1}{\lambda_b-\lambda_a}[\lambda_b e^{-(\lambda_a)t}-\lambda_a e^{-(\lambda_b)t}] \quad \text{.......... (5.27)}$$

c.　$\lambda_a=\lambda_b$ 時之可靠度及 MTTF

將(5.27)式改寫成

$$R(t)=e^{-(\lambda_a)t}+\frac{\lambda_a}{\lambda_b-\lambda_a}e^{-(\lambda_a)t}[1-e^{-(\lambda_b-\lambda_a)t}] \quad \text{.......... (5.28)}$$

而　$e^{-(\lambda_b-\lambda_a)t}=1-(\lambda_b-\lambda_a)t+\frac{1}{2}(\lambda_b-\lambda_a)^2t^2-\cdots$ .... (5.29)

將(5.29)式代入(5.28)式得

$$R(t)=e^{-(\lambda_a)t}+\lambda_a e^{-(\lambda_b)t}\left[t-\frac{1}{2}(\lambda_b-\lambda_a)t^2+\cdots\cdots\right]$$

若 $\lambda_a=\lambda_b=\lambda$，則

$$R(t)=e^{-(\lambda)t}+\lambda e^{-(\lambda)t}[t]=(1+\lambda t)e^{-\lambda t} \quad \text{......................................} (5.30)$$

$$\text{MTTF}=\int_0^\infty R(t)dt=\int_0^\infty(1+\lambda t)e^{-\lambda t}dt=\frac{2}{\lambda}=\frac{4}{2\lambda}$$

(主動複聯之 MTTF $=\dfrac{2}{\lambda}-\dfrac{1}{2\lambda}=\dfrac{3}{2\lambda}$，可見被動複聯之可靠度高於主動複聯可靠度)

例 5.24 設某產品之 MTTF 為 3000 小時，現將執行連續 500 小時的任務。求：

1. 任務期間之可靠度，
2. 若將兩個該產品以被動複聯方式連結，求連結後該系統之 MTTF 及任務期間之可靠度？

解

1. $R(t)=\exp(-\dfrac{1}{3000}\times 500)=0.846$
2. $\text{MTTF}=\dfrac{2}{\lambda}=2\times 3000=6000$ (小時)

   由(5.30)式，

   $$R(t)=(1+\lambda t)e^{-\lambda t}=\left(1+\frac{1}{3000}\times 500\right)\exp\left(-\frac{1}{3000}\times 500\right)=0.988$$

(2) 考慮切換裝置的失效

設切換裝置之(需求)失效率為 p，此時之馬可夫狀態及狀態轉移圖如圖 5-14 所示。

組件	狀態編號			
	1	2	3	4
a	O	F	O	F
b	O	O	F	F

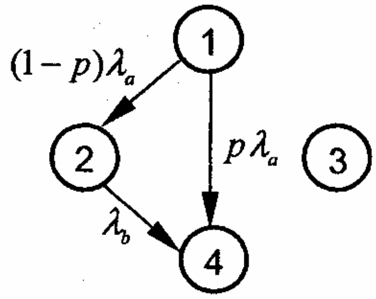


圖 5-14　考慮切換裝置失效的馬可夫狀態及狀態轉移圖

a.　假設備用組件於備用狀態不會失效，亦即備用組件不會在主要組件失效之前發生失效，故 $P_3(t)=0$。

b.　三個狀態轉移方程式如下：

$$\frac{d}{dt}P_1(t)=-(1-p)\lambda_a P_1(t)-p\lambda_a P_1(t)=-\lambda_a P_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_2(t)=(1-p)\lambda_a P_1(t)-\lambda_b P_2(t)\ ,\ \frac{d}{dt}P_4(t)=\lambda_b P_2(t)+p\lambda_a P_1(t)$$

解得各狀態之機率為

$$P_1(t)=e^{-(\lambda_a)t}\ ,\ P_2(t)=(1-p)\frac{\lambda_a}{\lambda_b-\lambda_a}[e^{-(\lambda_a)t}-e^{-(\lambda_b)t}]$$

故該系統之可靠度為

$$R(t)=\sum_{i\in O}P_i(t)=P_1(t)+P_2(t)=e^{-(\lambda_a)t}+\frac{(1-p)\lambda_a}{\lambda_b-\lambda_a}[e^{-(\lambda_a)t}-e^{-(\lambda_b)t}]$$

若 $\lambda_a=\lambda_b=\lambda$，則

$$R(t)=[1+(1-p)\lambda t]e^{-\lambda t} \quad \text{.......} (5.31)$$

由(5.31)式可知：

(a)　p 遞增，備用組件之價值遞減。

(b)　$p=1$ 時，備用組件已無法提昇系統可靠度。

例 5.25　設某產品之可靠度為 0.9，且備用組件於備用狀態時之失效率可忽略不計，但切換開關之失效率必須考慮。現欲採兩組件複聯方式提高可靠度，求：

1. 主動複聯與被動複聯之可靠度各爲多少？
2. 欲使被動複聯之可靠度高於主動複聯，則切換開關之失效率至多爲多少？
3. 若任務時間非常短，欲使被動複聯之可靠度高於主動複聯，則切換開關之失效率之需求爲何？

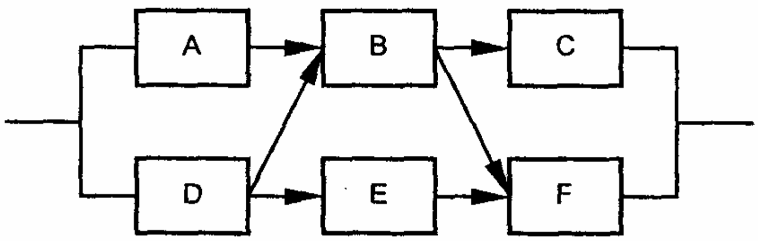
解

1. $R(t)=\exp(-\lambda T)=0.9 \quad \Rightarrow \quad \lambda T=0.1054$
主動複聯可靠度 $R_A=2e^{-\lambda T}-e^{-2\lambda T}=0.98999$
(比較： $R_A=\left[1-(1-0.9)(1-0.9)\right]=0.99$)
被動複聯可靠度 $R_P=[1+(1-p)\lambda t]e^{-\lambda t}=0.9948-0.094856p$
2. 令 $0.98999=0.9948-0.094856p$，解得 $p=0.0507$
3. 若任務時間非常短，由稀有事件之結果
主動複聯可靠度 $R_A\cong 1-(\lambda T)^2$
被動複聯可靠度 $R_P=[1+(1-p)\lambda t]e^{-\lambda t}\cong[1+(1-p)\lambda t]$
$$(1-\lambda T)=1-p\lambda T-\left(\frac{1}{2}-p\right)(\lambda T)^2$$
令 $R_A=R_P$ ，得 $p=\dfrac{\frac{1}{2}\lambda T}{1-\lambda T}\approx\frac{1}{2}\lambda T$ 。
所以任務時間 T 愈短，則 p 須跟著愈小，否則無法使被動複聯之可靠度高於主動複聯。

4. 裴氏網路法(Petrinet method)
以裴氏網路進行系統建模以及可靠度評估的方法請參考附錄 B、C。裴氏網路是一紙上作業的工具，但裴氏網路可以實現成特用晶片(Application-Specific Integrated Circuit，ASIC)，以硬體形式執行其功能。裴氏網路實現成特用晶片的相關研討請參考附錄 D。

❖ 習 題

1. 某產品經測試得其可靠度爲 0.9，
   (1) 若在相同條件下，兩個該產品並聯所得之可靠度爲多少？
   (2) 若上小題之情況經測試得可靠度爲 0.97，求：
      (a) 共同模式失效率？
      (b) 該產品之獨立失效率？
      (c) 共同模式失效因子β之值？
   (3) 若要求兩個該產品並聯之後之可靠度爲 0.98，則共同模式失效因子β之值應爲多少？
2. 請寫出
   (1) Bayes' rule，
   (2) Total probability theorem，
   (3) Generalized Bayes's rule。
3. 某系統由 6 個裝置以鍊式結構組成如圖，各裝置之可靠度如下：$R_A = 0.9$，$R_B = 0.8$，$R_C = 0.7$，$R_D = 0.6$，$R_E = 0.5$，$R_F = 0.4$。請以
   (1) Decomposition method，
   (2) Petri net/Matrix method，求該系統之不可靠度。



4. 某產品有四分項，要求連續使用 10 小時之 R = 0.95，其中第一及第三分項爲關鍵分項，第二分項之任務時間爲 8 小時，關鍵因子爲 0.9，第四分

項之任務時間為 7 小時，關鍵因子為 0.8，各分項零件數為 $N_1 = 20$，$N_2 = 100$，$N_3 = 60$，$N_4 = 80$。請以 AGREE 法求各分項之可靠度配當。(答案請標示至小數點以下第四位)

5. 某系統有三個零件並聯組成，每一零件之失效率 $\lambda = 0.01$ 次/小時，求：
   (1) 該系統之可靠度，
   (2) 該系統 10 小時內仍可運作之機率？
   (3) 該系統之 MTTF？
6. 某系統由三個可靠度均為 0.9 之元件串聯而成。求：
   (1) 該系統之可靠度？
   (2) 若採高階複聯，複聯後之可靠度？
   (3) 若採低階複聯，複聯後之可靠度？
7. 某水庫洩洪閘門之啓動系統的需求失效機率為 0.0001，然不該啓動而啓動之機率為 0.00001。為確保水庫水位過高時能及時洩洪，現將三組啓動系統採高階主動複聯，求：
   (1) 該複聯系統之危險失效機率及安全失效機率各為多少？
   (2) 若該複聯系統係 2-out-of-3 系統，其危險失效機率及安全失效機率各為多少？
8. 某裝置之失效率為 0.001 次/hr，現以一失效率為 0.002 次/hr 之裝置與其被動複聯。假設 Backup unit 於備用狀態下不會失效，請以 Markov Process 求於 100h 之內：
   (1) 該系統處於失效狀態的機率？
   (2) 若考慮切換裝置之失效率為 0.001，求該系統之可靠度。(答案需計算至小數點以下第 7 位，四捨五入至第 6 位)

9. Demand pacemaker 的方塊圖如下，請將其轉換為 Petri net 以描述其動作。