統計學

第十五章 指數(選讀)

書號：512282

編著 江建良

普林斯頓國際有限公司

15-1 指數概述

指數的意義：

係指多種同類現象之平均的相對變動量數。

如：在報章雜誌常見的消費者物價指數，

是用以表示多種物品不同時期價格水準變動的指數。

指數的性質：

- 相對性。
- 綜合性。
- 平均性。
- 代表性。

15-1 指數概述

指數的功用：

1. 指數能以一個簡單量數(以時間數列方式)，來表示多種同類現象的一般水準在不同時期之變動程度。
2. 依各種不同單位之現象，相互比較。
3. 可依指數的漲跌，作為顯示貨幣購買力的大小。
4. 可依指數作為商業的季節性或循環性的指標。
5. 可供釐訂國家財經政策的參考及調整軍公教人員待遇及工資的標準。

15-1 指數概述

指數的種類：

1. 按求平均與求比率過程的先後，分為兩類：

   (1) 綜合式指數　(2) 平均式指數

2. 按基期固定與否，分為兩類：

   (1) 定基指數　(2) 環比指數

3. 按有無加權，分為兩類：

   (1) 簡單指數　(2) 加權指數

4. 按用途分為三類：

   (1) 物價指數　(2) 物量指數　(3) 物值指數

15-1 指數概述

- 指數分類表：
  - 指　數
    - 簡　單　指　數
      - 簡單綜合式指數
        - 定基指數
        - 環比指數
      - 簡單平均式指數
        - 定基指數
        - 環比指數
    - 加　權　指　數
      - 加權綜合式指數
        - 定基指數
        - 環比指數
      - 加權平均式指數
        - 定基指數
        - 環比指數

P576

15-2 簡單指數

簡單指數的意義與計算方法：

係指未用權數計算的指數，又稱為不加權指數。

計算方法：

- 1. 簡單綜合式指數
  - 定基指數
  - 環比指數
- 2. 簡單平均式指數
  - (1) 簡單算術式指數
  - (2) 簡單幾何式指數
  - (3) 簡單調和式指數
  - (4) 簡單中位數式指數
  - (5) 簡單眾數式指數
    - 定基指數
    - 環比指數

15-2 簡單指數

簡單綜合式指數：

定基指數：

$$AG_{oi} = \frac{\frac{1}{n}(P_i' + P_i'' + \cdots + P_i^{(n)})}{\frac{1}{n}(P_o' + P_o'' + \cdots + P_o^{(n)})} = \frac{\Sigma P_i}{\Sigma P_o}$$

環比指數：

$$AG_{(i-1)i} = \frac{\Sigma P_i}{\Sigma P_{i-1}}$$

例題 15-1

試就下列資料編製各年簡單綜合式的物價指數（包含定基指數及環比指數）（設以 94 年為基期）。

時　期	米（公斤）	油（公斤）	鹽（公斤）	糖（公斤）
94 年	12	14	10	10
95 年	14	14	12	11
96 年	18	12	15	13

解：(a) 定基指數：

$$95\text{ 年：}\quad AG_{94,95}=\frac{\Sigma P_{95}}{\Sigma P_{94}}=\frac{14+14+12+11}{12+14+10+10}\times 100=110.87$$

$$96\text{ 年：}\quad AG_{94,96}=\frac{\Sigma P_{96}}{\Sigma P_{94}}=\frac{18+12+15+13}{12+14+10+10}\times 100=126.09$$

(b) 環比指數：

$$95\text{ 年：}\quad AG_{94,95}=\frac{\Sigma P_{95}}{\Sigma P_{94}}=\frac{14+14+12+11}{12+14+10+10}\times 100=110.87$$

$$96\text{ 年：}\quad AG_{95,96}=\frac{\Sigma P_{96}}{\Sigma P_{95}}=\frac{18+12+15+13}{14+14+12+11}\times 100=113.73$$

15-2 簡單指數

簡單平均式指數：

簡單算術式物價指數：

$$\bar{X}_{oi} = \frac{1}{n}\left[\frac{P_i'}{P_o'} + \frac{P_i''}{P_o''} + \cdots + \frac{P_i^{(n)}}{P_o^{(n)}}\right] = \frac{1}{n}\sum\left(\frac{P_i}{P_o}\right)$$

簡單幾何式物價指數：

$$G_{oi} = \sqrt[n]{\frac{P_i'}{P_o'} \times \frac{P_i''}{P_o''} \times \cdots \times \frac{P_i^{(n)}}{P_o^{(n)}}} = \sqrt[n]{\pi \frac{P_i}{P_o}}$$

$$= \frac{\sqrt[n]{P_i' \times P_i'' \times \cdots \times P_i^{(n)}}}{\sqrt[n]{P_o' \times P_o'' \times \cdots \times P_o^{(n)}}} = \frac{\sqrt[n]{P_i}}{\sqrt[n]{P_o}}$$

15-2 簡單指數

- 簡單平均式指數：
  - 簡單調和式物價指數：

$$H_{oi} = \frac{1}{\frac{1}{n}\left[\frac{P_o'}{P_i'} + \frac{P_o''}{P_i''} + \cdots + \frac{P_o^{(n)}}{P_i^{(n)}}\right]}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}\sum\left(\frac{P_o}{P_i}\right)} = \frac{n}{\sum\frac{P_o}{P_i}}$$

例題 15-2

試利用下表資料，以 95 年為基期，求算 96 年的三種簡單平均式指數，並作比較。

商品	單位	95 年 (P_0)	96 年(P_i)
A	件	25	30
B	包	100	125
C	件	30	35
D	公斤	5	5

解：

商　品	P_o	P_i	$\frac{P_i}{P_o}$	$\frac{P_o}{P_i}$	log P_o	log P_i
A	25	30	1.200	0.833	1.3979	1.4771
B	100	125	1.250	0.800	2	2.0969
C	30	35	1.167	0.857	1.4771	1.5441
D	5	5	1.000	1.000	0.6990	0.6990
合　計			$\sum \frac{P_i}{P_o} = 4.617$	$\sum \frac{P_o}{P_i} = 3.490$	$\sum \log P_o = 5.574$	$\sum \log P_i = 5.8171$

(a) 算術平均式：

$$\overline{X}_{oi} = \frac{1}{n} \cdot \Sigma \frac{P_i}{P_o} = \frac{4.617}{4} \times 100 = 115.43$$

(b) 幾何平均式：

$$G_{oi} = \sqrt[4]{1.2 \times 1.25 \times 1.167 \times 1} \times 100 = 115.02$$

或

$$\log G_{oi} = \frac{1}{n}[\Sigma \log P_i - \Sigma \log P_o]$$

$$= \frac{1}{4}(5.8171 - 5.574) = 0.0608$$

$$G_{oi} = 1.15 \times 100 = 115$$

(c) 調和平均式：

$$H_{oi}=\frac{n}{\sum\frac{P_o}{P_i}}=\frac{4}{3.490}\times 100=114.61$$

(d) 由平均數的性質得知，$\overline{X}>G>H$ （ 詳見第三章 ），故指數亦為 $\overline{X}_{oi}>G_{oi}>H_{oi}$ 。換言之，算術平均式指數偏高，調和平均式指數偏低，而幾何平均式指數不偏。

例題 15-3

試就 15-2.2 之例題 15-1 求算鏈指數，並說明其性質。

解：

年　別	定基指數	環比指數	鏈指數
94 年	100	—	100
95 年	110.87	110.87	110.87 ①
96 年	126.09	113.73	126.09 ②

① $=100\times110.87=110.87$ (以 110.87 表示)

② $=100\times110.87\times113.73=110.87\times113.73=126.09$ (以 126.09 表示)

由上式計算可知，鏈指數乃由環比指數連乘而得，並且還原爲以固定基期爲準的定基指數，所以定基指數與鏈指數同。

15-3 加權指數

加權指數的意義：

所謂 “權” ，係指用以權衡輕重之分的數值，
稱為權數 (weight)，凡是以不同權數，
權衡物品輕重所求算出的指數，即為加權指數。

15-3 加權指數

- 加權指數的計算方法：

  - 拉氏公式：

$$L_{oi} = \frac{P_i' q_o' + P_i'' q_o'' + \cdots + P_i^{(n)} q_o^{(n)}}{P_o' q_o' + P_o'' q_o'' + \cdots + P_o^{(n)} q_o^{(n)}} = \frac{\Sigma P_o q_o}{\Sigma P_o q_o}$$

  - 派氏公式：

$$P_{oi} = \frac{P_i' q_i' + P_i'' q_i'' + \cdots + P_i^{(n)} q_i^{(n)}}{P_o' q_i' + P_o'' q_i'' + \cdots + P_o^{(n)} q_i^{(n)}} = \frac{\Sigma P_i q_i}{\Sigma P_o q_i}$$

15-3 加權指數

- 加權指數的計算方法：
  - 艾馬綜合式：

$$E_{oi} = \frac{\sum P_i\left(\frac{q_o + q_i}{2}\right)}{\sum P_o\left(\frac{q_o + q_i}{2}\right)} = \frac{\sum P_i(q_o + q_i)}{\sum P_o(q_o + q_i)}$$

  - 理想公式：

$$I_{oi} = \sqrt{\frac{\sum P_i q_o}{\sum P_o q_o} \times \frac{\sum P_i q_i}{\sum P_o q_i}}$$

例題 15-4

試就下表求算：

(a) 拉氏、派氏、艾馬綜合式、理想公式之物價指數。

(b) 拉氏、派氏、艾馬綜合式、理想公式之物量指數。

(c) 物值指數

商　品	單　價		交易量	
	基　期	計算期	基　期	計算期
甲（打）	$75	$90	200	160
乙（箱）	300	375	100	80
丙（公升）	90	105	200	200
丁（公斤）	15	15	120	200

解：

商品	基期		計算期		$p_o q_o$	$p_i q_o$	$p_o q_i$	$p_i q_i$	$p_o(q_o+q_i)$	$p_i(q_o+q_i)$
	p_o	q_o	p_i	q_i						
甲	75	200	90	160	15,000	18,000	12,000	14,400	27,000	32,400
乙	300	100	375	80	30,000	37,500	24,000	30,000	54,000	67,500
丙	90	200	105	200	18,000	21,000	18,000	21,000	36,000	42,000
丁	15	120	15	200	1,800	1,800	3,000	3,000	4,800	4,800
和					64,800	78,300	57,000	68,400	121,800	146,700

(a) 物價指數：

① 拉氏公式：

$$L_{oi} = \frac{\Sigma p_i q_o}{\Sigma p_o q_o} = \frac{78,300}{64,800} \times 100 = 120.83$$

② 派氏公式：

$$P_{oi} = \frac{\Sigma p_i q_i}{\Sigma p_o q_i} = \frac{68,400}{57,000} \times 100 = 120.00$$

③ 艾馬綜合式公式：

$$E_{oi} = \frac{\Sigma p_i (q_o + q_i)}{\Sigma p_o (q_o + q_i)} = \frac{146,700}{121,800} \times 100 = 120.44$$

④ 理想公式：

$$I_{oi} = \sqrt{\frac{\Sigma p_i q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_i q_i}{\Sigma p_o q_i}} = \sqrt{(120.83)(120.00)} = 120.41$$

(b) 物量指數：

① 拉氏公式：

$$L_{oi}=\frac{\Sigma q_i p_o}{\Sigma q_o p_o}=\frac{57{,}000}{64{,}800}\times 100=87.96$$

② 派氏公式：

$$P_{oi}=\frac{\Sigma q_i p_i}{\Sigma q_o p_i}=\frac{68{,}400}{78{,}300}\times 100=87.36$$

③ 艾馬綜合式公式（讀者請自算）：

$$E_{oi}=\frac{\Sigma q_i (p_o+p_i)}{\Sigma q_o (p_o+p_i)}=\frac{125{,}400}{143{,}100}\times 100=87.63$$

④ 理想公式：

$$I_{oi}=\sqrt{\frac{\Sigma q_i p_o}{\Sigma q_o p_o}\times\frac{\Sigma q_i p_i}{\Sigma q_o p_i}}=\sqrt{87.96\times 87.36}=87.66$$

(c) 物值指數：

$$V=\frac{\Sigma p_i q_i}{\Sigma p_o q_o}=\frac{68{,}400}{64{,}800}\times 100=105.56$$

15-4 指數公式的偏誤

- **指數公式偏誤來源：**
  - **型偏誤：**

    計算指數時由所用的平均方法而產生之誤差，稱為型偏誤。

  - **權偏誤：**

    由權數而來之偏誤，稱為權偏誤。

15-4 指數公式的偏誤

指數公式的偏誤情形：

類 別	公式名稱	偏誤情形	偏誤來源		說明
			型偏	權偏	
綜合式	拉氏公式 派氏公式 艾馬二氏公式 理相公式	無 無 無 無			近似無偏 近似無偏 近似無偏 無偏誤
算術平均	加權平均第一式 加權平均第二式 加權平均第三式 加權平均第四式	無 無 二重偏高 二重偏高	高 高 高 高	低 低 高 高	相互低消，即拉氏公式 相互低消，即派氏公式
機何平均	加權平均第一式 加權平均第二式 加權平均第三式 加權平均第四式	一重偏低 一重偏低 一重偏高 一重偏高	無 無 無 無	低 低 高 高	
調和平均	加權平均第一式 加權平均第二式 加權平均第三式 加權平均第四式	二重偏低 二重偏低無 無	低 低 低 低	低 低 高 高	相互低消，即拉氏公式 相互低消，即派氏公式

15-5 指數公式的考驗與選擇

- **指數公式的考驗：**
  - 單位共通性 (commonsurability)
  - 簡單性 (simplicity)
  - 敏感性 (sensitivity)
  - 時間互換性 (time-reversal test)
  - 因子互換性 (factor-reversal test)
  - 循環性 (circular test)
  - 不偏性 (unbiasedness)

15-5 指數公式的考驗與選擇

指數公式的選擇：

1. 如有基期及計算期之物量資料作權數，宜採用理想公式。
   但因計算較繁，實際應用時，通常以艾馬公式代替
   理想公式，因此二式計算所得之結果相差甚微。

2. 如只有基期物量資料，宜採用拉氏公式，
   此公式雖然不合於時間互換和因子互換二條件，
   但為無偏誤之公式。

3. 如基期權數不能獲得，宜採用派氏公式。

4. 如只有估計之概數作權數，宜採用概數加權綜合式。

5. 如估計的權數亦不可得，則只能採用簡單公式，
   若採用簡單公式則宜採用簡單幾何式，
   因此公式為無型偏公式。

15-6 基期的選擇與轉換

固定基期的選擇：

1. 基期須為正常時期。
2. 宜選擇一年或數年平均為基礎，換言之，基期時間不宜太短。
3. 基期不可距離計算期太遠。

15-6 基期的選擇與轉換

固定基期的轉換：

固定基期轉換的原因：

1. 固定基期距計算期過遠，其比較不具意義，必須改換較近之基期。
2. 幾種不同基期的指數相互比較時，需換用同一基期。

固定基期轉換的方法：

1. 指數公式若合於循環性，則採用簡單除法 。
2. 指數公式若不合於循環性，在物價平穩下，亦可用簡單除法更換基期，否則需重新計算指數。
3. 同一組資料，按二個不同基期所編製的指數 。

例題 15-5

試根據下列工業生產指數，改以第四年為基期（設指數公式符合循環性）。

年別	1	2	3	4	5	6	7	8
指數	33.5	40.5	50.3	55.8	78.2	100	110	142.4

解： 用簡單除法轉換基期，改以第四年爲基期，則將每一指數除以 55.8 即可。

年別	1	2	3	4	5	6	7	8
指數	60.0	72.6	90.1	100	140.1	179.2	197.1	255.2

第 1 年：$\frac{33.5}{55.8}\times 100 = 60.0$，其他類推。

例題 15-6

試將下列新舊基期的物價指數，銜接起來。

年　別	1	2	3	4	5	6	7	8	9
舊指數	100	105	110	115	120				
新指數					100	110	140	145	150

(a) 設基期為第 1 年（向前轉換）。

(b) 設基期為第 5 年（向後轉換）。

解：(a) 基期爲第 1 年，則第 6~9 年的新指數各乘以第 5 年的指數比例 $1.2\left(\frac{120}{100}\right)$，即得各指數爲

年　別	1	2	3	4	5	6	7	8	9
指　數	100	105	110	115	120	132	168	174	180

第 6 年：$110\times\frac{120}{100}=132$

第 7 年：$140\times\frac{120}{100}=168$，其餘類推。

(b) 基期爲第 5 年，則第 1~5 年的舊指數各除以第 5 年的指數比例 $1.2\left(\frac{120}{100}\right)$，即得各指數爲

年　別	1	2	3	4	5	6	7	8	9
指　數	83	88	92	96	100	110	140	145	150

第 1 年：$100\div\frac{120}{100}=83$

第 2 年：$105\div\frac{120}{100}=88$，其餘類推。