

統計學

第十三章 無母數統計方法

13-1 無母數統計方法概述

13-2 符號檢定法

13-3 Wilcoxon符號等級檢定法

13-4 Wilcoxon等級和檢定法

13-5 Mann-Whitney檢定法

13-6 Kruskal-Wallis檢定法

13-7 Friedman檢定法

13-8 連檢定法

13-9 Spearman等級相關檢定法

書號：512282

編著 江建良



普林斯頓國際有限公司

13-1 無母數統計方法概述

● 無母數統計方法的意義：

無母數統計方法 (nonparametric statistics) 為不以母體中任何母數為估計或檢定對象的統計方法。

因其不必受到母體為常態分配型態的限制，因此又可稱為**不限母體分配型態的統計方法** (distribution-free statistics)；又由於其方法不以母數為推論對象，而轉向利用統計資料的大小或先後順序排列的方式，來進行統計分析，因此又常稱為**順序統計的推論方法** (order statistics)。



13-1 無母數統計方法概述

● 無母數統計方法的特質：

1. 不必受到母體分配型態的限制，尤其是常態分配型態。
2. 其所推論的對象不為母體中的任何母數，如：平均數。
3. 若母體分配型態已知，則有母數統計方法的推論效率會高於無母數統計方法。

由於無母數統計方法，常忽略一些資料(通常只利用資料的順序大小、排序進行推論工作，而不管資料本身的數值)，而造成推論效率降低。

4. 其推論方法常利用排序資料(順序尺度)來進行統計分析，以中位數表示其中心位置，位差(全距、四分位差等)表示離散的程度。



13-1 無母數統計方法概述

● 無母數統計方法與統計資料測量尺度之關係：

尺 度	比較項目	例 子	統計方法
名 義	本 身	男 - 女	無母數
順 序	次 序	偏好順序	無母數
區 間	區間比較	溫度差異	有母數
比 率	絕對數值	銷售量	有母數



13-1 無母數統計方法概述

● 常用的無母數統計方法：

✚ 單一樣本情況：

- (1) 符號檢定法。
- (2) Wilcoxon 符號等級 (**sign - rank**) 檢定法。
- (3) K-S 適合度檢定法。
- (4) 連檢定法。

✚ 兩獨立樣本情況：

- (1) Wilcoxon 等級和 (**rank - sum**) 檢定法。
- (2) Mann – Whiney 檢定法。
- (3) K-S 檢定法。



13-1 無母數統計方法概述

● 常用的無母數統計方法：

✚ 兩相依樣本情況：

- (1) 符號檢定法。
- (2) Wilcoxon 符號等級檢定法。

✚ k 組樣本情況：

- (1) k 組獨立樣本：Kruskal - Wallis 檢定法。
- (2) k 組相依本：Friedman 檢定法。



13-1 無母數統計方法概述

● 常用的無母數統計方法：

✚ Spearman 等級相關檢定法：

分析目的	有母數統計方法	無母數統計方法
單一樣本	$\left[\begin{array}{l} z \text{ 檢定} \\ t \text{ 檢定} \end{array} \right]$ — 平均數	$\left[\begin{array}{l} \text{符號檢定} \\ \text{Wilcoxon 符號等級檢定} \\ \text{K-S 檢定} \end{array} \right]$ — 中位數
兩獨立樣本差異	兩獨立樣本 t 檢定	$\left[\begin{array}{l} \text{Wilcoxon 等級和檢定} \\ \text{Mann-Whitney 檢定} \\ \text{K-S 檢定法} \end{array} \right]$
兩相依樣本差異	兩相依樣本 t 檢定	$\left[\begin{array}{l} \text{符號檢定} \\ \text{Wilcoxon 符號等級檢定} \end{array} \right]$
k 組獨立樣本差異	一因子變異數分析	Kruskal-Wallis 檢定法
k 組相依樣本差異	隨機化區集設計 (二因子重複實驗設計)	Friedman 檢定法

註：在兩獨立樣本情況，由於 **Wilcoxon 等級和檢定** 與 **Mann-Whitney 檢定** 原理相同，常以 **Mann-Wilcoxon 檢定法** 代之。



13-2 符號檢定法

例題 13-1

設有一樣本資料為 24, 22, 19, 31, 23, 42, 17, 15, 18, 28, 23, 15, 16, 18, 14, 25, 8，茲檢定母體資料中位數是否為 25？(設顯著水準為 0.05)

解： (a) 假設：
$$\begin{cases} H_0: \eta = 25 \\ H_1: \eta \neq 25 \end{cases}$$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 計算：其正負符號為 ---+-+---+-----00-

① 以小樣本情況檢定：採二項分配，其機率值 P

$$P = \sum_{s=0}^S C_s^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{s=0}^3 C_3^{16} \left(\frac{1}{2}\right)^{16} = 0.011 \text{ (查表)}$$

(式中正號較小 $S=3$, $n=16$ ，其中有兩個 $D=0$ ，不予考慮)



② 以大樣本情況檢定：採 Z 分配 ($\because nP \geq 5$ 且 $n(1-P) \geq 5$)

$$Z = \frac{\left(S \mp \frac{1}{2}\right) - \mu_S}{\sigma_S} = \frac{\left(3 - \frac{1}{2}\right) - 8}{2} = -2.75$$

$$\begin{cases} \mu_S = nP = 16 \times \frac{1}{2} = 8 \\ \sigma_S = \sqrt{nPq} = \sqrt{16 \times \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 \end{cases}$$

(d) 判斷：

① 小樣本情況： $P = 0.011 < \frac{\alpha}{2} = 0.025$

(即 $2P < \alpha, 0.022 < 0.05$)

② 大樣本情況： $Z = -2.75 < -Z_{0.975} = -1.96$

$\therefore$ 兩種結論相同，均放棄 H_0 ，即中位數不為 25。



例題 13-2

泰山公司想測定其產品品牌與競爭品牌何者優劣，乃抽選 20 名消費者試用一星期，然後請其評分 (1~5 分，1 最差，5 最好)，評估結果如下表所示，設 $\alpha = 0.05$ ，試檢定兩品牌是否有顯著差異？

學 生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
本公司品牌	4	5	4	4	4	3	5	2	1	4	4	5	2	4	2	4	1	4	4	4
競爭品牌	3	3	3	2	2	3	4	2	2	2	1	3	4	3	1	2	5	1	3	4



解： (a) 假設：
$$\begin{cases} H_0: \text{兩品牌無顯著差異} (\eta_1 = \eta_2) \\ H_1: \text{兩品牌有顯著差異} (\eta_1 \neq \eta_2) \end{cases}$$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 計算：其正負符號為 ($D = \text{本公司品牌 } x - \text{競爭品牌 } y$)

+++++0+0-++++-+++0

① 以小樣本情況檢定：採二項分配

$$\text{機率值 } P = \sum_{S=0}^3 C_3^{17} \left(\frac{1}{2}\right)^{17} = 0.006$$

(式中負號較小 $S = 3, n = 17$ ，其中有 3 個 $D = 0$ ，不予考慮)



② 以大樣本情況檢定：採 Z 檢定 ($\because nP \geq 5$ 且 $n(1-P) \geq 5$)

$$Z = \frac{\left(3 - \frac{1}{2}\right) - 8.5}{2.06} = -2.91$$
$$\begin{cases} \mu_s = 17 \times \frac{1}{2} = 8.5 \\ \sigma_s = \sqrt{17 \times \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 2.06 \end{cases}$$

(d) 判斷：

① 小樣本情況： $P = 0.006 < \frac{\alpha}{2} = 0.025$ (即 $0.012 < 0.05$)

② 大樣本情況： $Z = -2.91 < -Z_{0.975} = -1.96$

$\therefore$ 兩種結論相同，均放棄 H_0 ，即兩品種有顯著差異。



13-3 Wilcoxon 符號等級檢定法

例題 13-3

味全公司以 7 點量表 (1~7, 1 表示非常不喜歡, 7 表示非常喜歡) 來調查對甲產品的偏好程度, 今隨機抽取 15 人, 其回答之點數為:

樣本	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
點數	6	7	4	4	3	7	4	4	5	3	2	2	3	3	3

設 $\alpha = 0.05$, 試以 Wilcoxon 符號等級檢定顧客對產品是否有偏好差異?



解： (a) 假設： $\begin{cases} H_0: \eta = 4 \text{ (點數 4 居中，表示沒偏好差異)} \\ H_1: \eta \neq 4 \end{cases}$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 計算：

樣 本	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
點數 X_i	6	7	4	4	3	7	4	4	5	3	2	2	3	3	3
差數 $D = X_i - 4$	2	3	0	0	-1	3	0	0	1	-1	-2	-2	-1	-1	-1
$ D $	2	3	刪	刪	1	3	刪	刪	1	1	2	2	1	1	1
等 級	8	10.5	-	-	3.5	10.5	-	-	3.5	3.5	8	8	3.5	3.5	3.5

① $(11+10)/2 = 10.5$

② $(9+8+7)/3 = 8$

③ $(6+5+4+3+2+1)/6 = 3.5$

$W(+) = 8 + 10.5 + 10.5 + 3.5 = 32.5$

$W(-) = 3.5 + 3.5 + 8 + 8 + 3.5 + 3.5 + 3.5 = 33.5$



(d) 判斷： $\because W = 32.5$ (取小者) $>$ 臨界值 11 ($n = 11, \alpha = 0.05$)，差異不顯著，接受 H_0 ，即顧客對甲產品之偏好無顯著差異。

*若假設差數 D 之母體為對稱分配，則 $E(T) = 0$ ，

$$\sigma(T) = \sqrt{\frac{11 \times (11+1)(2 \times 11+1)}{6}} = 22.49$$

$$T = W(+) - W(-) = 32.5 - 33.5 = -1$$

$$Z = \frac{-1 - 0}{22.49} = -0.0445 > -Z_{0.975} = -1.96$$

落在接受域，所得之結論相同。



例題 13-4

試以 Wilcoxon 符號等級檢定例題 13-2 兩相依樣本情況之例。

解： (a) 假設：
$$\begin{cases} H_0: \text{兩品牌無顯著差異} (\eta_1 = \eta_2) \\ H_1: \text{兩品牌有顯著差異} (\eta_1 \neq \eta_2) \end{cases}$$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 計算：



學 生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
本公司品牌 (X_i)	4	5	4	4	4	3	5	2	1	4	4	5	2	4	2	4	1	4	4	4
競爭品牌 (Y_i)	3	3	3	2	2	3	4	2	2	2	1	3	4	3	1	2	5	1	3	4
差數 $D = X_i - Y_i$	1	2	1	2	2	0	1	0	-1	2	3	2	-2	1	1	2	-4	3	1	0
$ D $	1	2	1	2	2	刪	1	刪	1	2	3	2	2	1	1	2	4	3	1	刪
等 級	4	11	4	11	11	-	4	-	4	11	15.5	11	11	4	4	11	17	15.5	4	

$$W(+) = 121 \quad W(-) = 32$$

(d) 判斷：∵ $W = 32$ (取小者) < 臨界值 35 ($n = 17, \alpha = 0.05$)，差異顯著，∴ 放棄 H_0 ，即兩品牌有顯著差異。本結論與符號檢定法之結論相同。



例題 13-5

試以 Wilcoxon 符號等級檢定下表之結果 (設 $\alpha = 0.05$, X 與 Y 成對抽取)

樣 本	X 銷售量	Y 銷售量	差 數	差數的等級	總和較小的等級 (+)
1	40	65	-25	-23	
2	75	60	+15	+15	15
3	24	36	-12	-12	
4	21	15	+6	+6	6
5	8	12	-4	-4	
6	10	15	-5	-5	
7	15	12	+3	+3	3
8	30	48	-18	-18	
9	22	21	+1	+1	1
10	16	16	0	0	
11	15	8	+7	+7	7
12	56	85	-29	-25	
13	12	20	-8	-8	
14	4	18	-14	-14	
15	32	45	-13	-13	
16	20	29	-9	-9	



樣 本	X 銷售量	Y 銷售量	差 數	差數的等級	總和較小的等級 (+)
17	49	60	-11	-11	
18	32	22	+10	+10	10
19	15	32	-17	-17	
20	80	120	-40	-27	
21	30	30	0	0	
22	16	32	-15	-16	
23	41	20	+21	+21	21
24	35	11	+24	+22	22
25	24	50	-26	-24	
26	18	49	-31	-26	
27	16	58	-42	-28	
28	10	8	+2	+2	2
29	37	18	+19	+19	19
30	50	70	-20	-20	
					$\overline{W} = 106$



解： (a) 假設： $\begin{cases} H_0: \text{兩產品銷售量無顯著差異} \\ H_1: \text{兩產品銷售量有顯著差異} \end{cases}$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 計算：

$$E(W) = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{(28)(29)}{4} = 203$$

$$\sigma(W) = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}} = \sqrt{\frac{(28)(28+1)(2 \times 28+1)}{24}} = 43.9$$

$$Z = \frac{W - E(W)}{\sigma(W)} = \frac{106 - 203}{43.9} = -2.21$$

(d) 判斷： $\because -2.21 < -Z_{0.975} = -1.96$ ，落在放棄域，差異顯著，放棄 H_0 ，
即兩產品銷售量有顯著差異。 ❖



13-4 Wilcoxon 等級和檢定法

例題 13-6

今隨機各抽取甲乙班學生若干人，觀察其統計學成績，成績如下表所示，以 Wilcoxon 等級和檢定法，檢定甲班統計學成績是否比乙班好？（設 $\alpha = 0.05$ ）

甲班	83	65	74	87	76		
乙班	71	84	60	78	89	75	63



解： (a) 假設： $\begin{cases} H_0: \mu_{\text{甲}} \leq \mu_{\text{乙}} \\ H_1: \mu_{\text{甲}} > \mu_{\text{乙}} \end{cases}$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 計算： $n_1 = 5, \bar{X}_1 = 77, n_2 = 7, \bar{X}_2 = 74.29$

$$\because n_1 < n_2, \bar{X}_1 > \bar{X}_2$$

$\therefore$ 樣本觀察值按下降方式排列，其等級如下表所示：

甲班	4	10	8	2	6		
乙班	9	3	12	5	1	7	11

$$W_1 = 4 + 10 + 8 + 2 + 6 = 30$$

$$U_0 = W_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} = 30 - \frac{5(5 + 1)}{2} = 15$$

(d) 判斷： $\because P(U \leq 15 | H_0 \text{ 真}) = 0.378 > \frac{\alpha}{2} = 0.025$ ，差異不顯著，接受

H_0 ，即甲班統計學成績並沒有高於乙班。



例題 13-7

設兩產品的銷售量如下：(單位百萬元)

甲	55	62	76	71	83	89	82	76	95	67	40	69
乙	73	50	78	59	72	86	54	47	92	70	85	

設 $\alpha = 0.05$ ，試以 Wilcoxon 等級和檢定法檢定兩產品銷售量是否有顯著差異？



解： (a) 假設：
$$\begin{cases} H_0: \text{兩產品銷售量無顯著差異} \\ H_1: \text{兩產品銷售量有顯著差異} \end{cases}$$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 計算：最小樣本數為乙產品 $n_1 = 11$, $\bar{X}_1 = \frac{73+50+\cdots+85}{11} = 69.64$,

較大樣本數為甲產品， $n_2 = 12$, $\bar{X}_2 = 72.08$, $\because n_1 < n_2$, $\bar{X}_1 < \bar{X}_2$, 故
樣本觀察值等級數按上升排列，最小值給 1，如下表所示：

甲	5	7	14.5	11	18	21	17	14.5	23	8	1	9
乙	13	3	16	6	12	20	4	2	22	10	19	

W_1 (為 n_1 個樣本之等級和，即乙產品) $= 13+3+\cdots+10+19 = 127$, 代入統計量 $U_0 = W_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 127 - \frac{11(11+1)}{2} = 61$ 。

(d) 判斷： $\because U_0 > \text{查表值 } U = 33$, $\therefore$ 差異不顯著，接受 H_0 , 即兩產品
銷售無顯著差異。



13-5 Mann-Whitney 檢定法

例題 13-8

試以 13-4 [例題 13-6] 以 Mann-Whitney 檢定法，檢定甲班統計學是否比乙班好？

解： (a) 假設：
$$\begin{cases} H_0: \mu_{\text{甲}} \leq \mu_{\text{乙}} \\ H_1: \mu_{\text{甲}} > \mu_{\text{乙}} \end{cases}$$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 計算：

甲	4	10	8	2	6		
乙	9	3	12	5	1	7	11



$$n_1 = 5, W_1 = 4 + 10 + \cdots + 6 = 30$$

$$n_2 = 7, W_2 = 9 + 3 + \cdots 7 + 11 = 48$$

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - W_1 = (5)(7) + \frac{5(5 + 1)}{2} - 30 = 20$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - W_2 = (5)(7) + \frac{7(7 + 1)}{2} - 48 = 15$$

$$U_0 = \min(U_1, U_2) = \min(20, 15) = 15$$

(d) 判斷： $\because P(U \leq 15 | H_0 \text{ 真}) = 0.378 > 0.05$ ，差異不顯著，接受 H_0 ，即甲班統計學成績並沒有高於乙班，結論與 Wilcoxon 等級和檢定相同。



例題 13-9

試以 13-4 [例題 13-7] 以 Mann-Whitney 檢定法檢定之。

解：(a) 假設：
$$\begin{cases} H_0: \text{兩產品銷售量無顯著差異} \\ H_1: \text{兩產品銷售量有顯著差異} \end{cases}$$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 計算：

甲	5	7	14.5	11	18	21	17	14.5	23	8	1	9
乙	13	3	16	6	12	20	4	2	22	10	19	



$$W = 13 + 3 + \cdots + 10 + 19 = 127, n_1 = 11, n_2 = 12$$

$$E(W) = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2} = \frac{(11)(11 + 12 + 1)}{2} = 132$$

$$\sigma(W) = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}} = \sqrt{\frac{(11)(12)(11 + 12 + 1)}{12}} = 16.25$$

取
$$Z = \frac{W - E(W)}{\sigma(W)} = \frac{127 - 132}{16.25} = -0.308$$

(c) 判斷： $\because -0.308 > -Z_{0.975} = -1.96$ ，差異不顯著，接受 H_0 ，即兩者銷售量無顯著差異，其結論與 Wilcoxon 等級和同。 ❖



13-6 Kruskal-Wallis 檢定法

例題

13-10

從甲、乙、丙三班各抽出 5 人，其國文成績如下表，試以 Kruskal-Wallis 檢定法，檢定三班國文成績是否有顯著差異？
($\alpha = 0.05$)

甲班	乙班	丙班
51	57	65
60	67	74
58	69	77
61	63	80
68	71	79



解： (a) 假設：
$$\begin{cases} H_0: \text{三班國文成績無顯著差異} \\ H_1: \text{三班國文成績有顯著差異} \end{cases}$$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 計算：15 個樣本之等級如下：

甲班	乙班	丙班
1	2	7
4	8	12
3	10	13
5	6	15
9	11	14
22	37	61



$$R_{\text{甲}} = 22, R_{\text{乙}} = 37, R_{\text{丙}} = 61, k = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 5, n = 15$$

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

$$= \frac{12}{15(15+1)} \left[\frac{(22)^2}{5} + \frac{(37)^2}{5} + \frac{(61)^2}{5} \right] - 3(15+1) = 7.74$$

(d) 判斷：由於 $k = 3, n_1 = n_2 = n_3$ ，查 H 機率表，當 $H = 7.74$ 介於 7.98 ~ 5.7800 之間，即得機率值 P 在 0.01 ~ 0.049 之間，小於 $\alpha = 0.05$ ，故差異顯著，放棄 H_0 ，即三班的國文成績有顯著差異。 ❖



例題 13-11

從四個地區各隨機抽出四家便利超商，各每日營業額如下
(單位：千元)：

甲地區	乙地區	丙地區	丁地區
14	16	16	17
10	18	15	20
11	14	14	19
13	15	12	21

試以 Kruskal-Wallis 檢定法，檢定四個地區的便利超商每日營業額
是否有顯著性差異？



解： (a) 假設： $\begin{cases} H_0: \mu_{\text{甲}} = \mu_{\text{乙}} = \mu_{\text{丙}} = \mu_{\text{丁}} \\ H_1: \text{不全等} \end{cases}$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 計算：其等級數如下

甲	乙	丙	丁
6	10.5	10.5	12
1	13	8.5	15
2	6	6	14
4	8.5	3	16
13	38	28	57

$$R_{\text{甲}} = 13, R_{\text{乙}} = 38, R_{\text{丙}} = 28, R_{\text{丁}} = 57, k = 4,$$

$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 4, n = 16$ ，代入統計量

$$H = \frac{12}{(16)(17)} \left[\frac{(13)^2}{4} + \frac{(38)^2}{4} + \frac{(28)^2}{4} + \frac{(57)^2}{4} \right] - 3(17) = 11.27$$

(d) 判斷： $\because H = 11.27 > \chi_{0.95(3)}^2 = 7.81$ ，落在放棄域， $\therefore$ 放棄 H_0 ，即四

地區的便利超商的每日營業額有顯著的差異。



13-7 Friedman 檢定法

例題 13-12

三位觀眾給國內四家電視台新聞節目的評分如下表所示，設 $\alpha = 0.05$ ，試以 Friedman 檢定法檢定四家電視台的新聞節目評等是否一致？

觀 眾 \ 電視台	電視台			
	台 視	中 視	華 視	TVBS
甲	83	74	60	80
乙	84	75	72	88
丙	79	72	74	76



解：(a) 假設： $\begin{cases} H_0: \text{四家電視台評等一致} \\ H_1: \text{四家電視台評等不一致} \end{cases}$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 計算： $k = 4, n = 3$ (四行，三列)

觀眾 \ 電視台	台 視	中 視	華 視	TVBS
甲	4	2	1	3
乙	3	2	1	4
丙	4	1	2	3
R_i	11	5	4	10

$$\begin{aligned}
 \chi_r^2 &= \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{i=1}^k R_i^2 - 3n(k+1) \\
 &= \frac{12}{(3)(4)(4+1)} (11^2 + 5^2 + 4^2 + 10^2) - (3)(3)(4+1) \\
 &= 7.4
 \end{aligned}$$

(d) 判斷：查表得 $P(\chi_r^2 > 7.4) = 0.033 = P < \alpha = 0.05$ ，放棄 H_0 ，表示觀眾對四家電視台評等不一致。



例題 13-13

隨機抽取 9 位顧客，調查其對烏龍茶飲料的滿意程度，如下表所示（1 表示非常不滿意，5 表示非常滿意）：

顧客 \ 品牌	味 全	統 一	開 喜	愛之味	泰 山
1	2	1	4	3	5
2	2	3	4	1	5
3	4	1	3	2	5
4	1	2	5	3	4
5	1	2	3	5	4
6	1	3	4	2	5
7	1	3	4	5	2
8	1	2	4	3	5
9	4	1	2	3	5

試檢定五種品牌受滿意的程度是否一致？ ($\alpha = 0.05$)



解： (a) 假設： $\begin{cases} H_0: \text{五種品牌滿意一致} \\ H_1: \text{五種品牌滿意不一致} \end{cases}$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 計算： $R_1 = 17, R_2 = 18, R_3 = 33, R_4 = 27, R_5 = 40, k = 5, n = 9$

$$\begin{aligned}\chi_r^2 &= \frac{12}{(9)(5)(5+1)}(17^2 + 18^2 + 33^2 + 27^2 + 40^2) - (3)(9)(5+1) \\ &= 17.16\end{aligned}$$

(d) 判斷： $\because 17.16 > \chi_{(0.95, 4)}^2 = 9.49$ ，差異顯著，故放棄 H_0 ，即顧客對五種品牌的滿意程度不一致。



13-8 連檢定法

例題

13-

14

甲生針對十五題是非題的答案是：

○x○○○x○x○xxx○○x

請問：(1) 連數 r 為多少？

(2) 答案是否出現隨機性？($\alpha = 0.05$)



解： (a) $\frac{\bigcirc}{1} \frac{\times}{2} \frac{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}{3} \frac{\times}{4} \frac{\bigcirc}{5} \frac{\times}{6} \frac{\bigcirc}{7} \frac{\times\times\times}{8} \frac{\bigcirc\bigcirc}{9} \frac{\times}{10}$

共有 $r=10$ ， $\bigcirc$ 有 $n_1=8$ ， $\times$ 有 $n_2=7$ 個

(b) ① 假設： $\begin{cases} H_0: \text{答案隨機性出現} \\ H_1: \text{答案非隨機性出現} \end{cases}$

② 顯著水準 $\alpha=0.05$

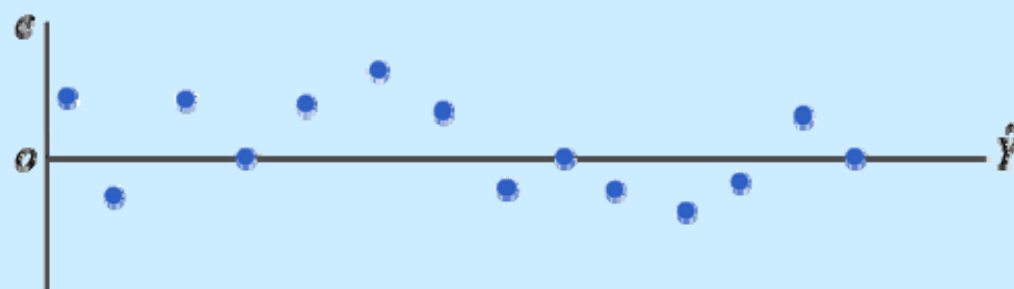
③ 計算： $r=10, n_1=8, n_2=7$ ，查連檢定的 r_L 與 r_u 得 $r_L=4, r_U=13$ 。

③ 判斷： $\because 4 \leq r=10 \leq 13$ ，落在接受域， $\therefore$ 接受 H_0 ，即答案可能隨機出現。



例題 13-15

茲以最小平方法求算迴歸線 $\hat{Y}_i = a + bX_i$ ，其中 $\hat{Y}_i$ 與 e_i 之圖形如下，試以 $\alpha = 0.05$ 檢定 e_i 是否具備隨機性？



解： (a) 假設： $\begin{cases} H_0: e_i \text{ 具備隨機性} \\ H_1: e_i \text{ 不具備隨機性} \end{cases}$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 計算： $\frac{+}{1} \frac{-}{2} \frac{+ \bigcirc}{3} \frac{++}{4} \frac{+}{5}$

$r = 5, n_1 (+ \text{號}) = 6, n_2 (- \text{號}) = 5$ ，查表得 $r_L = 3, r_U = 10$

(d) 判斷： $\because 3 \leq r = 5 \leq 10$ ，落在接受域，接受 H_0 ，即 e_i 具備隨機性。

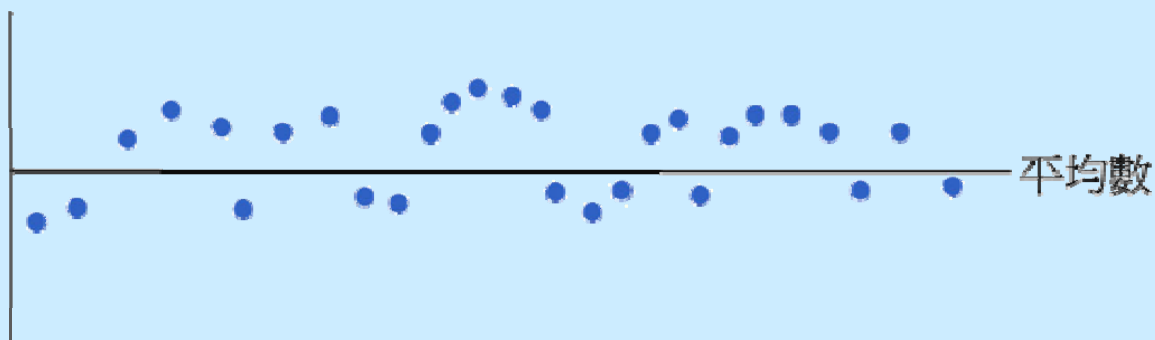


例題

13-

16

台泥廠定期檢驗產品，在平均線以上達標準，以下列為瑕疵品，如下圖所示，設 $\alpha = 0.05$ ，試檢定瑕疵品是否隨機出現？



解： (a) 假設： $\begin{cases} H_0: \text{瑕疵品為隨機發生} \\ H_1: \text{瑕疵品不為隨機發生} \end{cases}$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 計算：設x表瑕疵品，○表非瑕疵品。

xx○○○x○○xx○○○○

○xxx○○x○○○○x○x

$n_1 = 11$ (代表瑕疵品的個數)， $n_2 = 17$ (代表非瑕疵品的個數)，

$n = 28 = n_1 + n_2$ ， $r = 13$ ， $\because n_1$ 與 n_2 均大於 10， r 分配近似常態分配。

$$E(r) = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1 = \frac{2(11)(17)}{11 + 17} + 1 = 14.36$$

$$\sigma(r) = \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}} = \sqrt{\frac{2(11)(17)(2 \times 11 \times 17 - 11 - 17)}{(11 + 17)^2(11 + 17 - 1)}} \\ = 2.47$$

$$Z = \frac{r - E(r)}{\sigma(r)} = \frac{13 - 14.36}{2.47} = -0.55$$

(d) 判斷： $\because -0.55 > -Z_{0.975} = -1.96$ ，落在接受域，接受 H_0 ，即瑕疵品為隨機發生。



13-9 Spearman等級相關檢定法

例題 13-17

今自甲班及乙班分別抽出 10 名學生，其數學與統計學之成績如下：

學 生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
數 學	76	69	81	45	22	65	72	38	54	48
統計學	73	79	75	37	15	46	66	58	68	42

試求：(1) 等級相關係數。

(2) 兩班學生數學與統計學成績等級間是否有顯著相關？



解： (a) 等級相關係數：

先就兩科目個別成績評定其等級，最低分數給 1(亦可最高分給 1)。

學 生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
數學 (X_r)	9	7	10	3	1	6	8	2	5	4
統計學 (Y_r)	8	10	9	2	1	4	6	5	7	3
$d = X_r - Y_r$	1	-3	1	1	0	2	2	-3	-2	1

$$\Sigma d^2 = 1^2 + (-3)^2 + \dots + (-2)^2 + 1^2 = 34, n = 10$$

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{(6)(34)}{10(10^2 - 1)} = 1 - 0.206 = 0.794$$

(b) ① 假設：
$$\begin{cases} H_0: \rho_s = 0 \\ H_1: \rho_s \neq 0 \end{cases}$$

② 顯著水準： $\alpha = 0.05$

③ 計算：

(i) 設採 Z 分配

$$Z = r_s \sqrt{n-1} = 0.794 \sqrt{10-1} = 2.382$$



(ii) 設採 t 分配

$$t = \frac{r_s \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}} = \frac{0.794 \sqrt{10-2}}{\sqrt{1-(0.794)^2}} = 3.694$$

④ 判斷：

(i) $\because 2.382 > Z_{0.975} = 1.96$ ，放棄 H_0 。

(ii) $\because 3.694 > t_{0.975(8)} = 2.306$ ，放棄 H_0 。

即兩班學生數學與統計學成績等級間有顯著相關。

