

統計學

第十章 實驗設計與變異數分析

- 10-1 實驗法與實驗設計
- 10-2 統計的實驗設計
- 10-3 變異數分析的基本概念
- 10-4 完義隨機的變異數分析
- 10-5 多重比較
- 10-6 隨機區集設計的變異數分析
- 10-7 拉丁方格設計的變異數分析(選讀)
- 10-8 二因子設計的變異數分析(選讀)
- 10-9 t 檢定與 F 檢定的再說明

書號：512282

編著 江建良



普林斯頓國際有限公司

10-1 實驗法與實驗設計

● 實驗法的意義：

係指在控制的情境之下，實驗者有系統的**操弄** (manipulate) **實驗變數** (又稱**實驗因子**或**自變數**)，以觀察其對**實驗結果** (又稱**反應變數**、**依變數**) 的影響之研究程序。

✚ 實驗單位 (experimental unit)：

即被實驗的對象，如：**單位**或**人** (**受測者**、**受試者**)。

✚ 實驗變數 (experimental variable)：

即實驗者所操弄的變數，一般稱為**自變數** (independent variable) 或**實驗因子** (factor)。表示實驗因子的狀態，稱為**水準** (level)，而因子水準的特定組合，稱為**處理** (treatment)。



10-1 實驗法與實驗設計

● 實驗法的意義：

✚ 反應變數(response variable)：

即實驗結果的變數，一般稱為**依變數** (dependent variable)。

✚ 實驗設計(experimental design)：

即能增加實驗效果精確度的一些方法，如控制在干擾變數等方法。

✚ 變異數分析(ANOVA)：

即衡量自變數對依變數影響效果的統計方法。



例題 10-1

陳老師想研究三種教學方法對大二學生（共九班）統計學成績的影響，假設三種教學方法為黑板教學、投影片教學、電視教學，茲以實驗法說明相關的內容。

- 解：**
- (a) 實驗單位：即大二學生（共九班），一般稱為受測者。
 - (b) 實驗變數（自變數）：只有一項，即教學方法，有黑板教學、投影片教學、電視教學三種不同方式變化，由陳老師所操弄。教學方法亦稱為實驗因子，該因子有三個水準，即三種不同的教學方法，而三個水準，即三種不同的處理方式。
 - (c) 反應變數（依變數）：即統計學成績。因為陳老師想知道教學方法不同，是否統計學成績亦會隨之不同，所以統計學成績是為依變數，即實驗所要獲得的結果。



- (d) 實驗設計：因為影響統計學成績的變數，除教學方法不同外，尚有其他變數，如學生本身（如程度、用功與否、是否專心等），外在環境（如燈光、噪音、冷熱等）等。因此，我們若要得到統計學成績的不同，純粹是由教學方法不同所影響，就必須控制教學方法以外的干擾變數。常見的方法，是以隨機抽樣的方式，抽出班級再以隨機分派的方式，讓每種教學方法，均有三班學生接受實驗（共三組，每組三班）。如此，藉著隨機的方法，來沖銷或沖減干擾變數的影響，以提高實驗效果的精確度。
- (e) 變異數分析：陳老師想了解三種教學方法的效果，可由三組學生的統計學成績來作比較，即檢定三組學生統計學平均成績是否有顯著差異？此乃變異數分析的主要內容，亦即推論統計學的應用。 ❖



10-1 實驗法與實驗設計

● 實驗設計的意義與類型：

✚ 實驗設計的意義：

- (1) 狹義的實驗設計。 (2) 廣義的實驗設計。

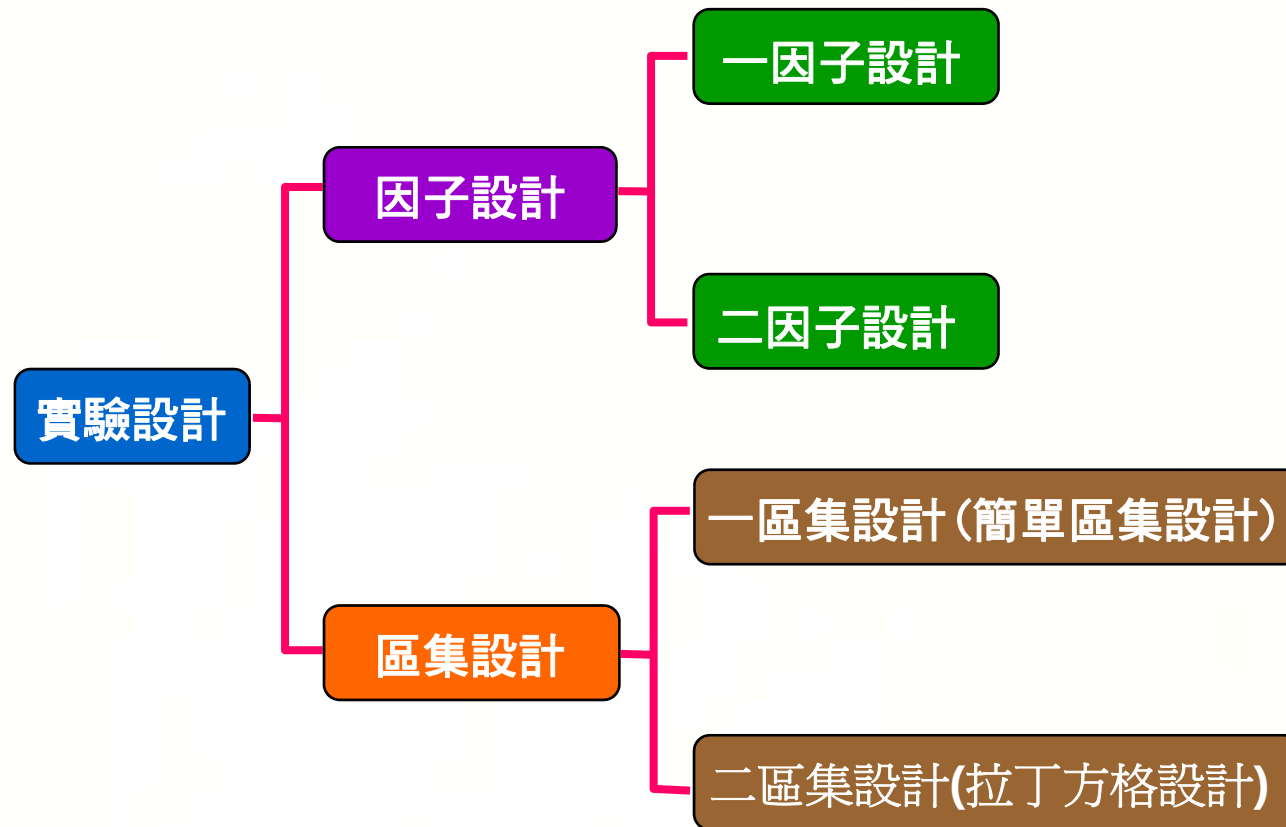
✚ 實驗設計的類型：

- (1) 因子設計：係指對實驗因子(即實驗變數)作適當處理的設計，使其能充分顯示出實驗因子對反應變數的影響情形。
- (2) 區集設計：係指依據某一外在影響變數，將實驗單位區分為若干區集，然後再觀察實驗因子對反應變數的影響效果。

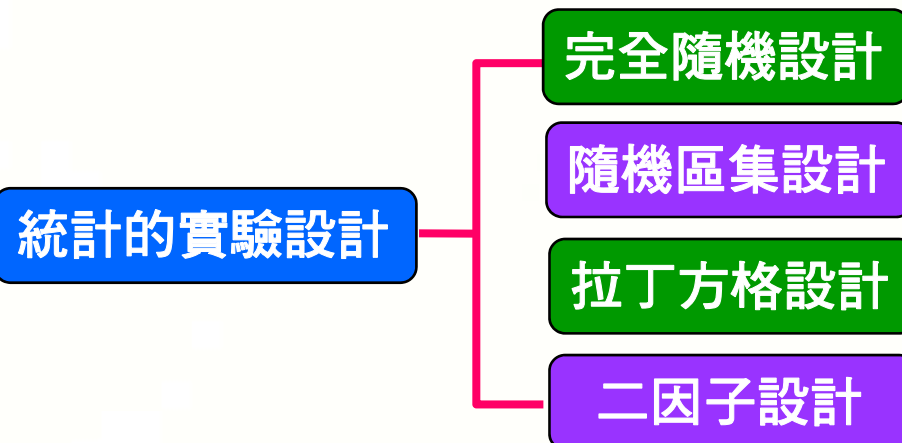


10-1 實驗法與實驗設計

● 實驗設計的意義與類型：



10-2 統計的實驗設計



● 完全隨機設計：

係指沒有區集設計的一因子實驗設計，
通稱為一因子分類 (one-way classification) 的實驗設計，
這是較簡單的實驗設計。

例題 10-2

若研究者想了解價格變數對銷售量的影響，試以完全隨機設計的方法安排設計內容。

解： (a) 實驗因子：價格。

(b) 水準或處理：設分別為高價格、中價格、低價格三種水準，即三種不同的處理方式。

(c) 隨機性：假定由台北市隨機抽樣出 9 家商店，茲隨機分派各 3 家商店到三種不同的水準（即高、中、低價格各有 3 家）。



- (d) 重覆性：因高、中、低三種不同價格水準各有 3 家，所以是重覆性。
- (e) 反應變數：即商店的銷售量。
- (f) 假設經過一星期後，蒐集這 9 家商店的銷售量。我們可將實驗設計繪成下表。表中數字代表各家商店的銷售量。

高價格	50	43	48
中價格	54	60	51
低價格	72	66	60



10-2 統計的實驗設計

● 隨機區集設計：

係指一區集設計的一因子設計之實驗設計。
其特色乃依某一外在變數將實驗單位劃分為若干區集 (block)，
使區集變數能吸收反應變數的某些變異，
而減少抽樣所造成的誤差。

● 拉丁方格設計：

係指二區集設計的一因子設計之實驗設計。
其特色為一種雙向區集設計，
包括行區集設計、列區集設計。



例題 10-3

若研究者想了解價格變數對銷售量之影響，而研究者事先知道商店類型不同會影響到銷售量，試以隨機區集設計的方法安排設計內容。

解： (a) 實驗因子：價格。

(b) 水準或處理：設價格分為高價格、中價格、低價格三種水準，即三種不同的處理方式。

(c) 區集性：利用商店類型的不同，作為區集的依據，如分為超市、超商、雜貨店、冷飲店等四個區集。



- (d) 隨機性：在每個區集中隨機抽出 3 家商店，(因有高、中、低價格三個水準)，並隨機分派到不同的三種水準，而每個區集所對應的每個水準之實驗單位只有一個，並不重覆。
- (e) 反應變數：商店之銷售量。
- (f) 假設經過一星期後，蒐集到這 12 家商店的銷售量，我們可將實驗設計繪成下表。表中數字代表各家商店的銷售量。

商店類型 (區集)	價 格		
	高	中	低
超 市	54	60	78
超 商	54	63	60
雜貨店	51	54	69
冷飲店	45	63	81



例題 10-4

若研究者想了解價變數對銷售量之影響，而事先知道商店地點與商店規模兩變數，會影響到銷售量，試以拉丁方格設計的方式安排設計內容。

解：(a) 實驗因子：價格水準。

(b) 水準或處理：設價格分為高價格、中價格、低價格三種水準，即三種不同的處理方式，設以 A 、 B 、 C 表示。

(c) 區集性：由於實驗因子有三個水準，所以兩區集變數亦必須有三個區集。設商店地點分為工業區、商業區、住宅區三個區集，另外商店規模分為大、中、小三個規模的區集。



- (d) 隨機性：今以隨機方式抽出 3×3 家商店，並以隨機方法將價格水準分派到各個商店。但相同價格水準不得在同一行或同一列中同時出現。
- (e) 反應變數： 3×3 家商店，共有 9 家商店的銷售量。
- (f) 假設經過一星期後，蒐集到 9 家商店的銷售量，我們可將實驗設計繪成下表。表中數字代表各家商店的銷售額， A 、 B 、 C 表示三種不同價格處理，不得在同行或同列中同時出現。

商店地點 \ 商店規模	商店規模		
	大	中	小
工 業 區	C72	B60	A54
商 業 區	A51	C69	B57
住 宅 區	B57	A48	C66



10-2 統計的實驗設計

● 二因子設計：

是指二個實驗因子的實驗設計 (區集設計可依實際需要加入或不加入)，又稱為二因子分類的實驗設計。

✚ 二因子設計之特點：

1. 可衡量各個實驗因子的個別效果，稱為主要效果 (main effects)。顯然其包括了完全隨機設計的優點。
2. 在重覆的實驗單位下，可衡量兩實驗因子間是否發生交互作用 (interaction effects，又稱為互動效果)。



例題 10-5

若研究者想了解價格與包裝兩變數對銷售量之影響，茲以二因子設計方式安排設計內容。

解：(a) 實驗因子：價格與包裝兩個因子。

(b) 水準或處理：設價格水準分為高價格、中價格、低價格三個水準；包裝分為包裝 A 與包裝 B 二個水準，由實驗者操弄。共有 3×2 個處理水準（即 6 個方格）。

(c) 隨機性：設隨機抽取 24 家商店，隨機分成 6 個實驗組（每組 4 家商店），再將 6 個實驗組隨機分派到 6 個方格中。

(d) 重覆性：每一方格有 4 家，即重覆性。



(e) 反應變數：24 家商店之銷售量。

(f) 假設經過一星期後，蒐集到這 24 家商店的銷售量，我們可將實驗設計繪成下表，表中數字代表各家商店的銷售量，以隨機方式加以重覆安排。

包 裝 \ 價 格	價 格		
	高	中	低
A	45	57	63
	42	42	72
	33	45	66
	46	47	57
B	36	54	63
	39	45	57
	51	42	69
	50	39	63



10-3 變異數分析的基本概念

● 變異數分析的意義：

係指將實驗的結果 (即反應變數) 按變異發生的原因，區分為實驗變數所造成的變異 (即已知原因所造成) 及外在干擾變數 (即實驗因子以外的因素) 所造成的變異 [通稱為實驗誤差 (如：抽樣與非抽樣誤差)]，再配合這兩類變異的自由度取成變異數，再轉換成分配，用分配來檢定各變異是否有顯著差異，以判斷變異發生的原因，是否顯著的統計方法。



10-3 變異數分析的基本概念

● 變異數分析的基本假設：

1. 每個處理水準 (即依實驗因子的準分組之各組樣本資料) 的母體，均為常態分配。
2. 每個處理水準的母體之變異數相等。
3. 抽自各母體的各組隨機樣本互為獨立。
4. 實驗結果的變異可區分為實驗因子所造成的變異，加上實驗因子以外的因素所造成的變異。



10-4 完全隨機的變異數分析

● 變異數分析表：

1. 實驗因子有 k 個水準處理，每個處理之實驗單位相同 (即分為 k 組，每組樣本大小 n 相等)：

完全隨機設計變異數分析表 (樣本大小相同)

變異來源	平方和 SS	自由度 f	均方 MS	F
處 理	SSB	$k - 1$	$MSB = \frac{SSB}{k - 1}$	$F = \frac{MSB}{MSE}$
誤 差	SSE	$k(n - 1)$	$MSE = \frac{SSE}{k(n - 1)}$	
總 和	SST	$nk - 1$		



10-4 完全隨機的變異數分析

● 變異數分析表：

2. 實驗因子有 k 個水準處理，每個處理之實驗單位不同
(即分為 k 組，每組樣本大小 n 不同)：

完全隨機設計變異數分析表 (樣本大小不等)

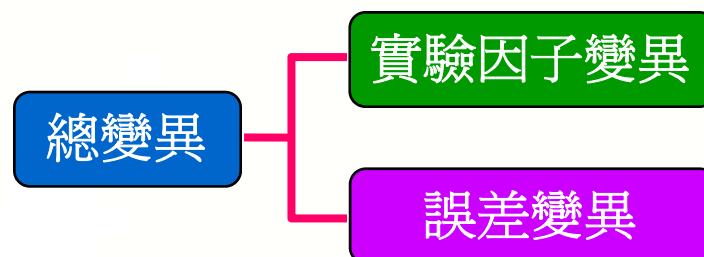
變異來源	平方和 SS	自由度 f	均方 MS	F
處 理	SSB	$k - 1$	$MSB = \frac{SSB}{k - 1}$	$F = \frac{MSB}{MSE}$
誤 差	SSE	$\sum_{i=1}^k n_i - k$	$MSE = \frac{SSE}{\sum_{i=1}^k n_i - k}$	
總 和	SST	$\sum_{i=1}^k n_i - 1$		



10-4 完全隨機的變異數分析

● 變異數分析的步驟：

1. 將總變異區分為實驗因子變異(處理變異、可解釋變異)與誤差變異(未解釋變異)。



2. 決定各變異對應之自由度。
3. 將變異平方和除以自由度，化為變異數(即均方)。
4. 求算 F 統計量。
5. 若 $F > F_{(1-\alpha: f_1 f_2)}$ 時，放棄 H_0 。



例題 10-6

為了解價格對銷售量的影響，乃進行一項試銷實驗，得銷售量如下：

高價格	50	43	48
中價格	54	60	51
低價格	72	66	60

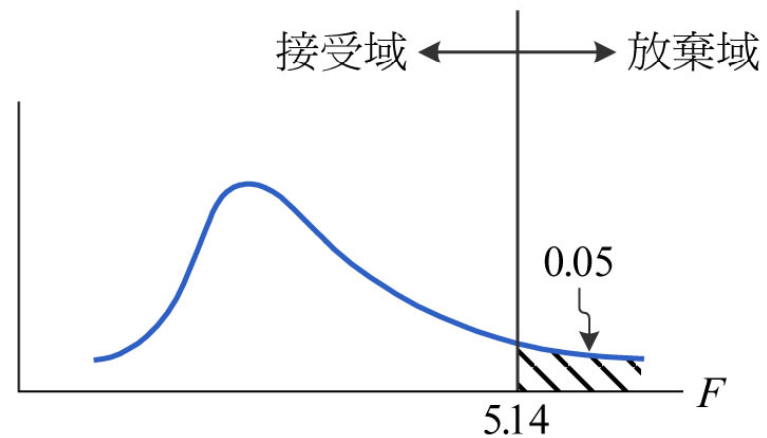
假設本資料適合變數分析，試在 $\alpha = 0.05$ 下，價格改變是否會影響到銷售量的不同？



解： (a) 假設： $\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \\ H_1: \mu_i \text{ 不全等} \end{cases}$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 放棄域： $F > F_{(0.95, 2, 6)} = 5.14$



(d) 計算：

$$\bar{Y}_1 = \frac{50 + 43 + 48}{3} = 47, \bar{Y}_2 = \frac{54 + 60 + 51}{3} = 55$$

$$\bar{Y}_3 = \frac{72 + 66 + 60}{3} = 66, \bar{\bar{Y}} = \frac{50 + 43 + \cdots + 66 + 60}{9} = 56$$

$$\begin{aligned} SST &= \sum \sum (Y_{ij} - \bar{\bar{Y}})^2 = (50 - 56)^2 + (43 - 56)^2 + \cdots + (60 - 56)^2 \\ &= 686 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SSB &= \sum \sum (\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}})^2 = 3[(47 - 56)^2 + 3(55 - 56)^2 + 3(66 - 56)^2] \\ &= 546 \end{aligned}$$

$$SSE = SST - SSB = 686 - 546 = 140$$

(e) 變異數分析表：

變異來源	SS	<i>f</i>	MS	<i>F</i>
價 格	546	2	273	11.70
誤 差	140	6	23.33	
總 和	686	8		

(f) 判斷： $F = 11.70 > 5.14$ ，落在放棄域，差異顯著， $\therefore$ 放棄 H_0 ，即表示不同價格會影響銷售量的不同。



例題 10-7

陳老師分別對四班各試行一種不同教學方法，期末考後從各班抽出部分學生，其統計學成績的資料如下，假設資料適合變異數分析，設 $\alpha = 0.01$ ，試檢定四種教學方法是否有顯著不同？

教學方法

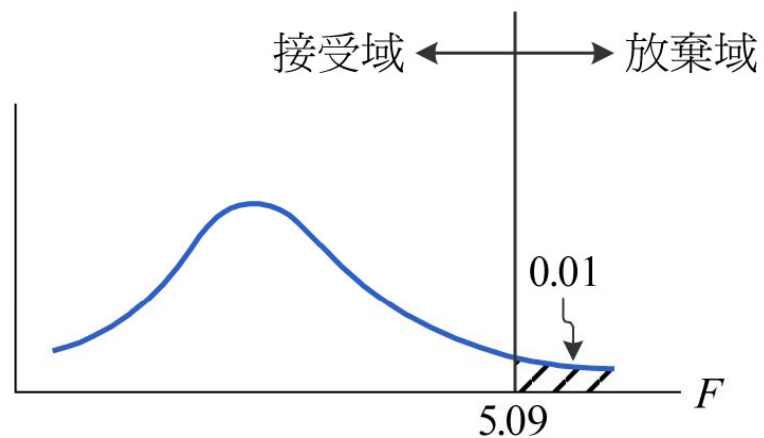
第一種	第二種	第三種	第四種
85	75	65	70
94	77	68	72
80	68	80	68
90	88	78	74
	83	76	65
		70	65
		73	



解： (a) 假設： $\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \\ H_1: \mu_i \text{ 不全等} \end{cases}$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.01$

(c) 放棄域： $F > F_{(0.99, 3, 18)} = 5.09$



(d) 計算：

$$\bar{Y}_1 = \frac{349}{4} = 87.25, \bar{Y}_2 = \frac{391}{5} = 78.2$$

$$\bar{Y}_3 = \frac{510}{7} = 72.86, \bar{Y}_4 = \frac{414}{6} = 69$$

$$\bar{\bar{Y}} = \frac{85 + 94 + \cdots + 65 + 65}{4 + 5 + 7 + 6} = 75.64$$

$$\begin{aligned} SST &= \sum \sum (Y_{ij} - \bar{\bar{Y}})^2 \\ &= (85 - 75.64)^2 + (94 - 75.64)^2 + \cdots + (65 - 75.64)^2 \\ &= 1,485.09 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SSB &= \sum \sum (\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}})^2 = 4(87.25 - 75.64)^2 + 5(78.2 - 75.64)^2 \\ &\quad + 7(72.86 - 75.64)^2 + 6(69 - 75.64)^2 \\ &= 890.68 \end{aligned}$$

$$SSE = SST - SSB = 1,485.09 - 890.68 = 594.41$$



(e) 變異數分析表：

變異來源	SS	f	MS	F
價 格	890.68	3	296.89	8.99
誤 差	594.41	18	33.02	
總 和	1,485.09	21		

(f) 判斷： $\because 8.99 > 5.09$ ，落在放棄域，差異顯著， $\therefore$ 放棄 H_0 ，即四組學生的統計學成績有顯著差異，換言之，四種教學方法有顯著的不同效果。



例題 10-8

已知三組資料如下：

$$\text{第 1 組： } n_1 = 3, \bar{X}_1 = 13, \hat{S}_1^2 = 25 \left[\hat{S}_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n_i - 1} \right]$$

$$\text{第 2 組： } n_2 = 5, \bar{X}_2 = 14, \hat{S}_2^2 = 16$$

$$\text{第 3 組： } n_3 = 7, \bar{X}_3 = 15, \hat{S}_3^2 = 9$$

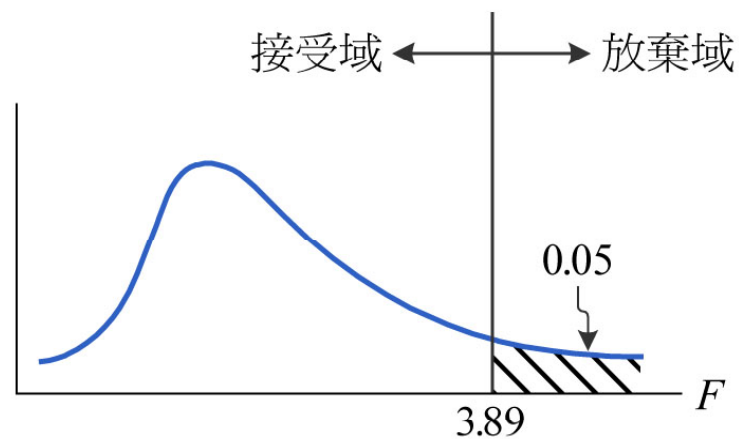
設 $\alpha = 0.05$ ，而資料適合變異數分析，試檢定三個母體的平均數是否相等？



解： (a) 假設：
$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \\ H_1: \mu_i \text{ 不全等} \end{cases}$$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 放棄域： $F > F_{(0.95, 2, 12)} = 3.89$



(d) 計算：

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{3(13) + 5(14) + 7(15)}{3 + 5 + 7} = 14.27$$

$$\begin{aligned} \text{SSB} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2 = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2 \\ &= 3(13 - 14.27)^2 + 5(14 - 14.27)^2 + 7(15 - 14.27)^2 \\ &= 8.93 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SSE} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \hat{S}_i^2 \\ &= (3 - 1)25 + (5 - 1)16 + (7 - 1)9 \\ &= 168 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SST} &= \text{SSB} + \text{SSE} \\ &= 8.93 + 168 \\ &= 176.93 \end{aligned}$$



(e) 變異數分析表：

變異來源	SS	f	MS	F
處 理	8.93	2	4.47	0.32
誤 差	168.00	12	14.00	
總 和	176.93	14		

(f) 判斷： $\because 0.32 < 3.89$ ，落在接受域，差異不顯著， $\therefore$ 接受 H_0 ，即表示三個母體的平均數可能相等。



10-5 多重比較

● 事後比較：

常用的檢定方法 (設以信賴區間檢定法進行檢定) 為薛費法 (Scheffe' method)，又稱為聯合信賴區間估計法 (simultaneous confidence interval)。

$$(\bar{Y}_i - \bar{Y}_j) \mp \sqrt{(k-1)F} \sqrt{\text{MSE}} \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}} \quad (i \neq j)$$

1. $\mu_1 - \mu_2$ 之信賴區間：

$$(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) \mp \sqrt{(k-1)F} \sqrt{\text{MSE}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

2. $\mu_1 - \mu_3$ 之信賴區間：

$$(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_3) \mp \sqrt{(k-1)F} \sqrt{\text{MSE}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}}$$

3. $\mu_2 - \mu_3$ 之信賴區間：

$$(\bar{Y}_2 - \bar{Y}_3) \mp \sqrt{(k-1)F} \sqrt{\text{MSE}} \sqrt{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}}$$



10-5 多重比較

● 事前比較：

$$(\bar{Y}_i - \bar{Y}_j) \mp t_{(1-\frac{\alpha}{2}, f)} \sqrt{\text{MSE}} \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}$$

多重比較 { 事後比較：共有 C_2^k 對平均數比較使用 F 檢定。
當變異數分析達顯著水準，才可實施。

事前比較 { ① 任意取一對或某些對作平均數比較
② 個別 μ_i 之估計。 } t 檢定



例題 10-9

茲就上節 (10-4) 之例題 10-6 進行 (設信賴係數 0.95) :

- (a) 是否能進行事後比較？若可，試求各平均數差的聯合信賴區間的估計，並說明檢定上的涵義 (設使用 Scheffe' 法)。
- (b) 事前比較 $\mu_1 - \mu_2$ 之 95% 的信賴區間。
- (c) 作 μ_1 之 95% 的信賴區間。

解： (a) $\because$ 變異數分析之 F 值達顯著水準，故可進行事後比較。其聯合信賴區間為：(共 $C_2^3 = 3$ 對)

$$\textcircled{1} \quad \mu_1 - \mu_2 \sim (47 - 55) \mp \sqrt{(3-1)5.14} \sqrt{23.33} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = -8 \mp 12.64$$

$$\textcircled{2} \quad \mu_1 - \mu_3 \sim (47 - 66) \mp \sqrt{(3-1)5.14} \sqrt{23.33} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = -19 \mp 12.64$$

$$\textcircled{3} \quad \mu_2 - \mu_3 \sim (55 - 66) \mp \sqrt{(3-1)5.14} \sqrt{23.33} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = -11 \mp 12.64$$



茲列表如下：

價格水準	高價格	中價格	低價格
高價格	—	-8 ∓ 12.64	$-19 \mp 12.64^*$
中價格		—	-11 ∓ 12.64
低價格			—

由上表可知， $\because \mu_1 - \mu_3$ 之信賴區間不包括 0， $\therefore$ 可能 μ_1 與 μ_3 不等，即差異顯著，而 $\mu_1 - \mu_2$ 與 $\mu_2 - \mu_3$ 因包括 0，差異不顯著，即 $\mu_1 = \mu_2$ 和 $\mu_2 = \mu_3$ 可能發生。（* 表示差異顯著）



(b) 個別 $\mu_1 - \mu_2$ 的 95% 之信賴區間：($t_{(0.975,6)} = 2.45$)

$$\mu_1 - \mu_2 \sim (47 - 55) \mp 2.45\sqrt{23.33} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = -8 \mp 9.66$$

$$-17.66 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 1.66$$

$\therefore$ 包括 0， $\therefore$ 差異不顯著。

(c) 個別 μ_1 的 95% 之信賴區間：

$$\mu_1 \sim 47 \mp 2.45\sqrt{\frac{23.33}{3}} = 47 \mp 6.83$$

$$40.17 \leq \mu_1 \leq 53.83$$



例題 10-10

試就上節 (10-4) 之例題 10-7，試求（設 $1-\alpha$ 為 0.95）：

- (a) 是否能進行事後比較？
- (b) 求第 2 組之 μ_2 的信賴區間。
- (c) 求 $\mu_2 - \mu_3$ 的信賴區間。

解： (a) $\because$ 該資料的變異數分析之 F 值無顯著差異，不適合事後比較。

$$(b) \mu_2 \sim 14 \pm 2.18 \sqrt{\frac{14}{5}} = 14 \pm 3.65, (t_{(0.975, 12)} = 2.18)$$

$$\therefore 10.35 \leq \mu_2 \leq 17.65$$

$$(c) \mu_2 - \mu_3 \sim (14 - 15) \pm 2.18 \sqrt{14} \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}} = -1 \pm 4.81$$

$$\therefore -5.81 \leq \mu_2 - \mu_3 \leq 3.81$$

$\because$ 區間包括 0， $\therefore$ 差異不顯著。



10-6 隨機區集設計的變異數分析

● 隨機區集設計的變異數分析表：

變異來源	SS	f	MS	F
處 理	SSC	$c - 1$	MSC	$F_c = \frac{MSC}{MSE}$
區 集	SSR	$r - 1$	MSR	$F_r = \frac{MSR}{MSE}$
誤 差	SSE	$(r-1)(c-1)$	MSE	
總 和	SST	$rc - 1$		

例題 10-11

統一公司為了解不同價格調整是否會影響銷售量，乃在台北市進行一項實驗。為考慮到不同商店類型可能會影響銷售量，於是選擇四種不同類型的商店各 3 家，每家只按一種價格水準出售產品，經一星期後，各家商店的銷售量如下表所示：

商店類型 (區集)	價 格		
	高	中	低
超 市	54	60	78
超 商	54	63	60
雜貨店	51	54	69
冷飲店	45	63	81

設該資料適合變異數分析， $\alpha = 0.05$ ，試求：

- (a) 不同的價格調整，對銷售量是否有顯著影響？
- (b) 不同的商店類型，對銷售量是否有顯著影響？



解： (a) 假設：

$$\begin{cases} H_0: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3} \text{ (價格變數)} \\ H_1: \mu_{.j} \text{ 不全等} \end{cases}$$
$$\begin{cases} H'_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.} = \mu_{4.} \text{ (區集變數)} \\ H'_1: \mu_{i.} \text{ 不全等} \end{cases}$$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 放棄域： $F_c > F_{(0.95, 2, 6)} = 5.14$

$F_r > F_{(0.95, 3, 6)} = 4.76$



(d) 計算：

$$\textcircled{1} \text{ 行 : } \bar{Y}_{1.} = \frac{204}{4} = 51, \bar{Y}_{2.} = \frac{240}{3} = 60, \bar{Y}_{3.} = \frac{288}{4} = 72$$

$$\textcircled{2} \text{ 列 : } \bar{Y}_{1.} = \frac{192}{3} = 64, \bar{Y}_{2.} = \frac{177}{3} = 59, \bar{Y}_{3.} = \frac{174}{3} = 58$$

$$\bar{Y}_{4.} = \frac{189}{3} = 63$$

$$\textcircled{3} \text{ 總平均 : } \bar{\bar{Y}} = \frac{54 + 54 + \cdots + 69 + 81}{12} = 61$$

$$\text{SST} = (54 - 61)^2 + (60 - 61)^2 + \cdots + (81 - 61)^2 = 1,266$$

$$\text{SSC} = 4[(51 - 61)^2 + (60 - 61)^2 + (72 - 61)^2] = 888$$

$$\text{SSR} = 3[(64 - 61)^2 + (59 - 61)^2 + (58 - 61)^2 + (63 - 61)^2] = 78$$

$$\text{SSE} = 1,266 - 888 - 78 = 300$$



(e) 變異數分析表：

變異來源	SS	f	MS	F
價格變數	888	2	444	8.88
區 集	78	3	26	0.52
誤 差	300	6	50	
總 和	1,266	11		

(f) 判斷：

- ① $\because 8.88 > 5.14$ ，差異顯著， $\therefore$ 放棄 H_0 ，即不同價格水準，其銷售量有顯著差異。
- ② $\because 0.52 < 4.76$ ，差異不顯著， $\therefore$ 接受 H'_0 ，商店類型不同，其銷售量無顯著差異。



例題 10-12

下列資料為四位學生英文、數學、會計學、統計學之期末考成績，設資料適合變異數分析，在 $\alpha=0.05$ 之下，試檢定：

- (a) 各科之難易程度是否相同？
- (b) 學生之能力程度是否相等？

學 生 \ 科 目	科 目			
	英 文	數 學	統計學	會計學
1	78	62	71	77
2	57	49	62	60
3	69	78	72	83
4	71	66	59	67



解： (a) 假設：
$$\begin{cases} H_0: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3} = \mu_{.4} \text{ (科目變數)} \\ H_1: \mu_{.j} \text{ 不全等} \end{cases}$$
$$\begin{cases} H'_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.} = \mu_{4.} \text{ (學生變數)} \\ H'_1: \mu_{i.} \text{ 不全等} \end{cases}$$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 放棄域： $F_c > F_{(0.95, 3, 9)} = 3.86$

$$F_r > F_{(0.95, 3, 9)} = 3.86$$



(d) 計算：

$$\textcircled{1} \text{ 行： } \bar{Y}_1 = \frac{275}{4} = 68.75, \bar{Y}_2 = \frac{255}{4} = 63.75,$$

$$\bar{Y}_3 = \frac{264}{4} = 66, \bar{Y}_4 = \frac{287}{4} = 71.75$$

$$\textcircled{2} \text{ 列： } \bar{Y}_1 = \frac{288}{4} = 72, \bar{Y}_2 = \frac{228}{4} = 57,$$

$$\bar{Y}_3 = \frac{302}{4} = 75.5, \bar{Y}_4 = \frac{263}{4} = 65.75$$

$$\textcircled{3} \text{ 總平均： } \bar{Y} = \frac{78 + 57 + \cdots + 83 + 67}{16} = 67.56$$

$$SST = (78 - 67.56)^2 + (62 - 67.56)^2 + \cdots + (67 - 67.56)^2 = 1,241.94$$

$$SSC = 4[(68.75 - 67.56)^2 + (63.75 - 67.56)^2 + (66 - 67.56)^2 \\ + (71.75 - 67.56)^2] = 143.69$$

$$SSR = 4[(72 - 67.56)^2 + (57 - 67.56)^2 + (75.5 - 67.56)^2 \\ + (65.75 - 67.56)^2] = 790.19$$

$$SSE = 1,241.94 - 143.69 - 790.19 = 308.06$$



(e) 變異數分析表：

變異來源	SS	f	MS	F
科 目	143.69	3	47.90	1.40
學 生	790.19	3	263.40	7.70
誤 差	308.06	9	34.23	
總 和	1,241.94	15		

(f) 判斷：

- ① $\because 1.40 < 3.86$ ，落在接受域，差異不顯著， $\therefore$ 接受 H_0 ，即科目難易程度並無顯著不同。
- ② $\because 7.70 > 3.86$ ，落在放棄域，差異顯著， $\therefore$ 放棄 H_0 ，即學生能力程度有顯著的不同。



10-7 拉丁方格設計的變異數分析(選讀)

● 拉丁方格設計的變異數分析表：

變異來源	SS	f	MS	F
處 理	SST_r	$k - 1$	MST_r	$F_t = \frac{MST_r}{MSE}$
區集 I (行)	SSC	$k - 1$	MSC	$F_c = \frac{MSC}{MSE}$
區集 II (列)	SSR	$k - 1$	MSR	$F_r = \frac{MSR}{MSE}$
誤 差	SSE	$(k-1)(k-2)$	MSE	
總 和	SST	$k^2 - 1$		



例題 10-13

味全公司為了解價格水準不同是否會影響銷售量，經事先調查發現，商店規模與商店地點亦可能會影響銷售量，乃採拉丁方格設計。設價格水準以 A (高價格)、B (中價格)、C (低價格) 表示，經一星期後，蒐集到商店的銷售量，以拉丁方格設計表示如下：

商店地點 \ 商店規模	商店規模		
	大	中	小
工業區	C72	B60	A54
商業區	A51	C69	B57
住宅區	B57	A48	C66

設 $\alpha = 0.05$ ，資料適合變異數分析，試檢定不同價格、不同商店規模與不同商店地點是否會影響銷售量？



解： (a) 假設：

$$\begin{cases} H_0: \text{價格不同，銷售量無顯著差異。} \\ H_1: \text{價格不同，銷售量有顯著差異。} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H'_0: \text{商店規模不同，銷售量無顯著差異。} \\ H_1: \text{商店規模不同，銷售量有顯著差異。} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H''_0: \text{商店地點不同，銷售量無顯著差異。} \\ H_1'': \text{商店地點不同，銷售量有顯著差異。} \end{cases}$$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 放棄域： $F_t > F_{(0.95, 2, 2)} = 19$

$$F_c > F_{(0.95, 2, 2)} = 19$$

$$F_r > F_{(0.95, 2, 2)} = 19$$



(d) 計算：茲將不同價格、商店規模、商店地點的銷售量之平均數

$\bar{T}_i$ 、 $\bar{C}_j$ 、 $\bar{R}_i$ ，列表如下：

平 均 數	1	2	3
不同價格 ($\bar{T}_i$)	51 ①	58	69
商店規模 ($\bar{C}_j$)	60 ②	59	59
商店地點 ($\bar{R}_j$)	62 ③	59	57

$$\textcircled{1} = \frac{51(A) + 48(A) + 54(A)}{3} = 51$$

$$\textcircled{2} = \frac{72 + 51 + 57}{3} = 60$$

$$\textcircled{3} = \frac{72 + 60 + 54}{3} = 62$$

$$\bar{\bar{Y}} = \frac{72 + 60 + \dots + 66}{9} = 59.33$$

$$SST = (72 - 59.33)^2 + (60 - 59.33)^2 + \dots + (66 - 59.33)^2 = 536.01$$

$$SST_r = 3[(51 - 59.33)^2 + (58 - 59.33)^2 + (69 - 59.33)^2] = 494.00$$

$$SSC = 3[(60 - 59.33)^2 + (59 - 59.33)^2 + (59 - 59.33)^2] = 2.00$$

$$SSR = 3[(62 - 59.33)^2 + (59 - 59.33)^2 + (57 - 59.33)^2] = 38.00$$

$$SSE = 536.01 - 494.00 - 2.00 - 38.00 = 2.00$$



(e) 變異數分析表：

變異來源	SS	f	MS	F
價格（處理）	494.00	2	247.00	247.00
商店規模（行）	2.00	2	1.00	1.00
商店地點（列）	38.00	2	19.00	19.00
誤差	2.00	2	1.00	
總和	536.00	8		

(f) 判斷：

- ① $\because 247.00 > 19$ ，差異顯著，放棄 H_0 ，即不同價格對銷售量會有顯著影響。
- ② $\because 1.00 < 19$ ，差異不顯著，接受 H_0' ，即商店規模對銷售量沒有顯著影響。
- ③ $\because 19.00 = 19$ ，差異不顯著，接受 H_0'' ，即商店地點對銷售量沒有顯著影響。



例題 10-14

某校為評估四位講師之教學能力，為消除不同科目與不同上課時間之影響，乃採拉丁方格設計。在表中 A、B、C、D 分別表示四位講師，每位講師分別在同一天中講授四門課之一組，共分派 16 位程度相近的學生，下表為學生之學期末成績。設 $\alpha = 0.05$ ，茲檢定：

- (a) 講師教學能力不同，學生成績是否有差異？
- (b) 各科目之難易程度不同，對學生成績是否有顯著影響？
- (c) 上課時間不同，學生成績是否有影響？

科目名稱 時間	英 文	數 學	統計學	會計學
1	A84	B79	C63	D97
2	B91	C82	D80	A93
3	C59	D70	A77	B80
4	D75	A91	B75	C68



解： (a) 假設：

$$\begin{cases} H_0: \text{講師能力不同，學生成績無顯著差異。} \\ H_1: \text{講師能力不同，學生成績有顯著差異。} \end{cases}$$
$$\begin{cases} H'_0: \text{科目難易程度不同，學生成績無顯著差異。} \\ H'_1: \text{科目難易程度不同，學生成績有顯著差異。} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H''_0: \text{上課時間不同，學生成績無顯著差異。} \\ H''_1: \text{上課時間不同，學生成績有顯著差異。} \end{cases}$$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 放棄域： $F_t > F_{(0.95, 3, 6)} = 4.76$

$$F_c > F_{(0.95, 3, 6)} = 4.76$$

$$F_r > F_{(0.95, 3, 6)} = 4.76$$



(d) 計算：茲將不同教學能力、不同科目與不同時間之成績的平均數，列表如下：

平 均 數	1	2	3	4
教學能力 $\bar{T}_i$	86.25	81.25	68.00	80.50
科 目 $\bar{C}_j$	77.25	80.50	73.75	84.50
時 間 $\bar{R}_i$	80.75	86.50	71.50	77.25

$$\bar{\bar{Y}} = \frac{1,264}{16} = 79$$

$$SST = (84 - 79)^2 + (79 - 79)^2 + \cdots + (68 - 79)^2 = 1,738$$

$$\begin{aligned} SST_r &= 4[(86.25 - 79)^2 + (81.25 - 79)^2 + (68 - 79)^2 + (80.50 - 79)^2] \\ &= 723.50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SSC &= 4[(77.25 - 79)^2 + (80.25 - 79)^2 + (73.75 - 79)^2 + (84.50 - 79)^2] \\ &= 252.50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SSR &= 4[(80.75 - 79)^2 + (86.50 - 79)^2 + (71.50 - 79)^2 + (77.25 - 79)^2] \\ &= 474.50 \end{aligned}$$

$$SSE = 1,738 - 723.50 - 252.50 - 474.50 = 287.50$$



(e) 變異數分析表：

變異來源	SS	f	MS	F
教師能力（處理）	723.50	3	241.17	5.03
科目（行）	252.50	3	84.17	1.76
時間（列）	474.50	3	158.17	3.30
誤差	287.50	6	47.92	
總和	1,738	15		

(f) 判斷：

- ① $\because 5.03 > 4.76$ ，差異顯著，放棄 H_0 ，即教師能力對學生成績顯著影響。
- ② $\because 1.76 < 4.76$ ，差異不顯著，接受 H'_0 ，即科目難易程度對學生成績無顯著影響。
- ③ $\because 3.30 < 4.76$ ，差異不顯著，接受 H''_0 ，即不同上課時間對學生成績無顯著影響。



10-8 二因子設計的變異數分析(選讀)

● 二因子設計的變異數分析表：

變異來源	SS	f	MS	F
因子 A	SSC	$c - 1$	$MSC = \frac{SSC}{c - 1}$	$F_c = \frac{MST}{MSE}$
因子 B	SSR	$r - 1$	$MSR = \frac{SSR}{r - 1}$	$F_r = \frac{MSC}{MSE}$
交互作用	SSI	$(r-1)(c-1)$	$MSI = \frac{SSI}{(r-1)(c-1)}$	$F_j = \frac{MSR}{MSE}$
誤 差	SSE	$rc(n-1)$	$MSE = \frac{SSE}{rc(n-1)}$	
總 和	SST	$rcn - 1$		



例題 10-15

黑松公司想了解價格與包裝兩個變數對銷售量的影響，乃採二因子設計，試驗結果之資料如下：

包 裝 \ 價 格	高	中	低
	高	中	低
A	45	57	63
	42	42	72
	33	45	66
B	36	54	63
	39	45	57
	51	42	69

設 $\alpha = 0.05$ ，試檢定：

- (a) 價格不同是否會影響銷售量？
- (b) 不同包裝是否會影響銷售量？
- (c) 價格與包裝是否有交互作用？



解： (a) 假設：

$$\begin{cases} H_0 : \text{價格因子對銷售量無顯著影響。} \\ H_1 : \text{價格因子對銷售量有顯著影響。} \\ H'_0 : \text{包裝因子對銷售量無顯著影響。} \\ H'_1 : \text{包裝因子對銷售量有顯著影響。} \\ H''_0 : \text{價格與包裝無交互作用。} \\ H''_1 : \text{價格與包裝有交互作用。} \end{cases}$$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 放棄域： $F_c > F_{(0.95, 2, 12)} = 3.89$

$$F_r > F_{(0.95, 1, 12)} = 4.75$$

$$F_i > F_{(0.95, 2, 12)} = 3.89$$



(d) 計算：茲將各平均數計算如下表：

包 裝 \ 價 格	高	中	低	平 均 ($\bar{Y}_{i..}$)
A	40 ①	48	67	51.67 ②
B	42	47	63	50.67
平均 ($\bar{Y}_{.j}$)	41 ③	47.50	65	$\bar{\bar{Y}} = 51.17$ ④

$$\textcircled{1} = \frac{45 + 42 + 33}{3} = 40$$

$$\textcircled{2} = \frac{40 + 48 + 67}{3} = 51.67$$

$$\textcircled{3} = \frac{40 + 42}{2} = 41$$

$$\textcircled{4} = \frac{41 + 47.50 + 65}{3} = 51.17$$



$$SST = (45 - 51.17)^2 + (57 - 51.17)^2 + \dots + (69 - 51.17)^2 = 2,402.52$$

$$SSC = 2 \times 3 \times [(41 - 51.17)^2 + (47.50 - 51.17)^2 + (65 - 51.17)^2] \\ = 1,849.02$$

$$SSR = 3 \times 3 \times [(51.67 - 51.17)^2 + (50.67 - 51.17)^2] = 4.5$$

$$SSI = 3[(40 - 41 - 51.67 + 51.71)^2 + (48 - 47.50 - 51.67 + 51.17)^2 \\ + (67 - 65 - 51.67 + 51.71)^2 + (42 - 41 - 50.67 + 51.17)^2 \\ + (47 - 47.50 - 50.67 + 51.71)^2 + (63 - 65 - 50.67 + 51.17)^2] \\ = 27$$

$$SSE = 2,402.52 - 1,849.02 - 4.5 - 27 = 522$$



(e) 變異數分析表：

變異來源	SS	f	MS	F
價 格	1,849.02	2	924.51	20.89
包 裝	4.50	1	4.50	0.10
交互作用	27.00	2	13.50	0.31
誤 差	522.00	12	43.50	
總 和	2,402.52	17		

(f) 判斷：① $20.89 > 3.89$ ，放棄 H_0 ，即價格銷售量有顯著影響。

② $0.10 < 4.75$ ，接受 H'_0 ，即包裝對銷售量無顯著影響。

③ $0.31 < 3.89$ ，接受 H''_0 ，即價格與包裝無交互作用。❖



例題 10-16

下列資料為五名學生的英文、數學、統計學、會計學四科期中考成績，設 $\alpha = 0.05$ ，試檢定：

- (a) 科目難易程度是否相等？
- (b) 五名學生程度是否相等？
- (c) 科目與學生是否發生交互作用？

科目 學生	英 文		數 學		統計學		會計學	
甲	88	63	51	58	73	81	87	81
	79	80	72	65	77	77	92	76
乙	79	96	85	95	82	36	80	93
	56	68	67	88	80	68	62	67
丙	67	66	74	47	91	95	77	70
	51	89	59	82	59	92	84	73
丁	35	60	76	49	43	52	55	49
	64	70	26	76	42	32	53	56
戊	99	77	44	94	95	81	83	76
	87	95	83	76	98	96	87	80



解： (a) 假設：

$$\begin{cases} H_0: \text{科目難易程度無顯著差異。} \\ H_1: \text{科目難易程度有顯著差異。} \end{cases}$$
$$\begin{cases} H'_0: \text{學生程度無顯著差異。} \\ H'_1: \text{學生程度有顯著差異。} \end{cases}$$
$$\begin{cases} H''_0: \text{科目與學生無交互作用} \\ H''_1: \text{科目與學生有交互作用} \end{cases}$$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 放棄域： $F_c > F_{(0.95, 3, 60)} = 2.76$

$$F_r > F_{(0.95, 4, 60)} = 2.53$$

$$F_i > F_{(0.95, 12, 60)} = 1.92$$

(d) 計算：① $SST = 23,403.39$

④ $SSI = 3,267.75$

② $SSC = 157.94$

⑤ $SSE = 9,936.75$

③ $SST = 10,040.95$



(e) 變異數分析表：

變異來源	SS	f	MS	F
科 目	157.94	3	52.65	0.32
學 生	10,040.95	4	2,510.24	15.16
交互作用	3,267.75	12	272.31	1.64
誤 差	9,936.75	60	165.61	
總 和	23,403.39	79		

(f) 判斷：① $\because 0.32 < 2.76$ ，放棄 H_0 ，即科目難易程度無顯著差異。

② $\because 15.16 > 2.53$ ，接受 H'_0 ，即學生程度有顯著差異。

③ $\because 1.64 < 1.92$ ，接受 H''_0 ，即科目與學生無顯著交互作用。

(註：本題是以電腦統計軟體計算，讀者自行參考之。) ❖



10-9 t 檢定與 F 檢定的再說明

例題 10-17

分別自甲乙兩班抽出四名學生，其統計學成績如下：

甲班：63, 65, 62, 66 乙班：56, 53, 58, 61

假設統計學成績呈常態分配，設 $\alpha = 0.05$ ，試分別以 t 分配及 F 分配。

- (a) 檢定兩班統計學平均分數是否有顯著差異？
- (b) $1 - \alpha$ 為信賴係數 0.95，求 $\mu_1 - \mu_2$ 之信賴區間。



解： (a) 檢定：

① 假設： $\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$

② 顯著水準： $\alpha = 0.05$

③ 放棄域：(i) 若為 t 檢定： $t > t_{(0.975, 6)} = 2.447$ 或 $t < -2.447$

(ii) 若為 F 檢定： $F > F_{(0.95, 1, 6)} = 5.99$

④ 計算：

(i) t 分配：

甲班： $n_1 = 4, \bar{Y}_1 = 64, \hat{S}_1^2 = \frac{10}{3}$

乙班： $n_2 = 4, \bar{Y}_2 = 57, \hat{S}_2^2 = \frac{34}{3}$

$$S_P = \sqrt{\frac{(4-1)\left(\frac{10}{3}\right) + (4-1)\left(\frac{34}{3}\right)}{4+4-2}} = \sqrt{\frac{22}{3}}$$

$$t_0 = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{64 - 57}{\sqrt{\frac{22}{3}} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = 3.6557$$



(ii) F 分配：

$$\bar{Y}_1 = 64, \bar{Y}_2 = 57, \bar{\bar{Y}} = 60.5$$

$$SST = (63 - 60.5)^2 + (65 - 60.5)^2 + \cdots + (61 - 60.5)^2 = 142$$

$$SSB = 4[(64 - 60.5)^2 + (57 - 60.5)^2] = 98$$

$$SSE = 142 - 98 = 44$$

$$F_0 = \frac{MSB}{MSE} = \frac{\frac{98}{2-1}}{\frac{44}{8-2}} = 13.36$$

⑤ 判斷：

(i) t 分配：

$\because t_0 = 3.6557 > 2.447$ ，差異顯著，放棄 H_0 ，即甲乙兩班統計學成績有顯著不同。

(ii) F 分配：

$\because F = 13.36 > 5.99$ ，差異顯著，放棄 H_0 ，即甲乙兩班統計學成績有顯著差異。

⑥ 兩者之關係：

(i) $[t_{(0.975, 6)} = 2.447]^2 = F_{(0.95, 1, 6)} = 5.99$

(ii) $(t_0 = 3.6557)^2 = F_0 = 13.36$



(b) 估計：

① t 分配：

$$\begin{aligned}\mu_1 - \mu_2 &\sim (64 - 57) \mp (2.447) \left(\sqrt{\frac{22}{3}} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \right) \\ &= 7 \mp 4.69 \\ \therefore \quad 2.31 &\leq \mu_1 - \mu_2 \leq 11.69\end{aligned}$$

② F 分配：

$$\begin{aligned}\mu_1 - \mu_2 &\sim (64 - 57) \mp (\sqrt{(2-1)5.99}) \left(\sqrt{\frac{22}{3}} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \right) \\ &= 7 \mp 4.69 \\ \therefore \quad 2.31 &\leq \mu_1 - \mu_2 \leq 11.69\end{aligned}$$

由上述可知檢定與估計來看，兩組獨立樣本之 t 檢定與變異數分析之完全隨機設計的 F 檢定 ($k = 2$) 相同。 ❖



例題 10-18

茲抽取五位兒童觀看恐怖電影，比較前後之脈搏跳動之資料如下：

兒童 時間	甲	乙	丙	丁	戊
前	90	102	100	85	103
後	93	110	110	90	112

設 $\alpha = 0.05$ ，試分別以 t 分配及 F 分配。

(a) 檢定看電影前後脈搏跳動之平均次數是否相同？

(b) $1 - \alpha = 0.95$ 為信賴係數下，求 $\mu_1 - \mu_2$ 之信賴區間。



解：(a) 檢定：

① 假設：
$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

② 顯著水準： $\alpha = 0.05$

③ 放棄域：(i) 若為 t 檢定： $t > t_{(0.975, 4)} = 2.776$ 或 $t < -2.776$

(ii) 若為 F 檢定： $F > F_{(0.95, 1, 4)} = 7.71$

④ 計算：

(i) t 分配：

$$D = -3, -8, -10, -5, -9$$

$$\bar{D} = \frac{-35}{5} = -7, \hat{S}_D^2 = \frac{1}{5-1} \sum (D - \bar{D})^2 = 8.5$$

$$\hat{S}_D = 2.92$$

$$t_0 = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{\hat{S}_D}{\sqrt{n}}} = \frac{-7 - 0}{\frac{2.92}{\sqrt{5}}} = -5.368$$



(ii) F 分配：

$$SST = 828.50 \quad , \quad SSR = 122.50$$

$$SSC = 689.00 \quad , \quad SSE = 17.00$$

變異來源	SS	f	MS	F
兒 童	689.00	4	172.25	$F_c = 40.53$
時 間	122.50	1	122.50	$F_r = 28.82$
誤 差	17.00	4	4.25	
總 和	828.50	9		

⑤ 判斷：

(i) t 分配：

$\because t_0 = -5.368 < -2.776$ ，差異顯著，即看電影前後脈搏跳動不同。

(ii) F 分配（時間為實驗因子）：

$\because F_r = 28.82 > 7.71$ ，差異顯著，即看電影前後脈搏跳動不同。

⑥ 兩者之關係：

(i) $[t_{(0.975, 4)} = 2.776]^2 = F_{(0.95, 1, 4)} = 7.71$

(ii) $(t_0 = -5.368)^2 = F_r = 28.82$



(b) 估計：

$$\textcircled{1} \quad \mu_1 - \mu_2 \sim -7 \mp 2.776 \cdot 2.92 / \sqrt{5} = -7 \mp 3.62$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \mu_1 - \mu_2 &\sim (96 - 103) \mp (\sqrt{(2-1)7.71}) (\sqrt{4.25}) \left(\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}} \right) \\ &= -7 \mp 3.62 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad -10.62 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -3.38$$

由上述可知檢定與估計來看，兩組成對樣本之 t 檢定與變異數分析之隨機區集設計的 F 檢定 ($k=2$) 相同。 ❖

