

統計學

第九章 推論(二) - 假設檢定

- 9-1 統計假設檢定概念
- 9-2 常態母體平均數假設的檢定
- 9-3 常態母體變異數假設的檢定
- 9-4 點二項母體比例之假設檢定
- 9-5 其他檢定方法
- 9-6 型 I 誤差與型 II 誤差的再說明
- 9-7 樣本大小的決定



書號：512282

編著 江建良



普林斯頓國際有限公司

9-1 統計假設檢定概念

● 統計假設檢定的意義：

簡稱**統計檢定**或**統計考驗**，係指先對母體未知的母數給予一個假定的數值，稱為**假設** (**hypothesis**)，然後隨機抽樣，利用樣本作成檢定統計量，並應用機率原理來檢定此一假設是否可以接受之過程，稱為統計假設檢定。

● 統計假設檢定的意義：

✚ 假設的種類：

- (1) **虛無假設**：係指研究者希望放棄、否定的假設，以 H_0 表示之。
- (2) **對立假設**：係指對立於虛無假設以外之其他可能數值，以 H_1 表示之。



9-1 統計假設檢定概念

● 統計假設檢定的意義：

✚ 決定虛無(或對立)假設的原則：

1. 研究者希望放棄的假設，不希望接受的假設，可置於虛無假設中。
2. 能使檢定式簡單的假設，設為虛無假設。
3. 由抽樣出的樣本計算顯示，其欲檢定母數的樣本統計值可能大於或小於某人(或單位、機構)所宣稱的值，若樣本統計值大於宣稱值，則對立假設設為大於宣稱值，虛無假設則設為小於等於宣稱值。

✚ 簡單假設與複合假設：

1. 簡單假設：係指在假設之中，只含有某一特定值或是特定分配的假設。
2. 複合假設：係指在假設之中，不是只含一個特定值而是一些數值的集合。



例題 9-1

試就下列各題敘述，確立假設型態。

- (a) 戒煙團體宣稱台北市抽煙者每人每天平均抽煙 8 支，今抽樣 $n=100$ 人，得知每人每天平均抽煙 7 支，則該宣稱是否屬實？
- (b) 台光公司宣稱其日光燈平均壽命大於 750 小時，標準差 30 小時，今抽樣 50 支日光燈，計算出其平均壽命為 720 小時。該宣稱是否屬實？
- (c) 據稱某校騎機車上課的學生少於 25%，今隨機抽樣 $n=75$ 人，得知有 21 人騎機車上課，該據稱是否可靠？



解： (a) $H_0 : \mu = 8, H_1 : \mu \neq 8$ (卻放棄之假設為 H_0 ; 計算容易之假設設為 H_0)

(b) $H_0 : \mu \geq 750, H_1 : \mu < 750$ ($\because$ 樣本統計值 720 小時，小於宣稱值，
 $\therefore H_1$ 設為 $\mu < 750, H_0$ 設為 $\mu \geq 750$)

(c) $H_0 : P \leq 0.25, H_1 : P > 0.25$ ($\because$ 樣本統計值 $\hat{P} = \frac{21}{75} = 0.28 >$ 宣稱值
 $P = 0.25$, $\therefore H_1$ 設為 $P > 0.25$, 而 H_0 則設為 $P \leq 0.25$) ❖



例題 9-2

試指出下列假設型態何者為簡單假設？複合假設？其中 θ 為母數符號， θ_0 表估計值。

① $H_0: \theta = \theta_0, H_1: \theta = \theta_1$ ，其中 $\theta_0 \neq \theta_1$

② $H_0: \theta = \theta_0, H_1: \theta \neq \theta_0$

③ $H_0: \theta \leq \theta_0, H_1: \theta > \theta_0$

④ $H_0: \theta \geq \theta_0, H_1: \theta < \theta_0$

解：(a) ①為簡單假設，因 H_0 與 H_1 均只是一個特定值。

(b) ②③④為複合假設，因②之 H_1 為此數值 (θ_0) 以外值的集合，只要 $\theta \neq \theta_0$ 即可，③④ H_0 與 H_1 均為一些數值的集合。 ❖



9-1 統計假設檢定概念

● 統計假設檢定的意義：

✚ 假設的來源：

- | | |
|-------------|-----------------|
| (1) 科學法則 | (4) 與零比較 |
| (2) 人為假設 | (5) 與某理論分配比較 |
| (3) 與過去基礎比較 | (6) 兩個或多個項目是否相等 |

● 檢定的基本原理：

- (1) 若 $|\hat{\theta}_0 - \theta_0|$ 差異甚小，此樣本統計值在 H_0 為真的情況下，被抽出的機率甚大，則可接受虛無假設。
- (2) 若 $|\hat{\theta}_0 - \theta_0|$ 差異甚大，此樣本統計值在 H_0 為真的情況下，被抽出的機率甚小，則放棄虛無假設，接受對立假設。



9-1 統計假設檢定概念

● 型 I 誤差與型 II 誤差：

✚ 型 I 誤差：

$$P(I) = P(\text{型 I 誤差}) = P(\text{放棄 } H_0 \mid H_0 \text{ 為真})$$

✚ 型 II 誤差：

$$P(II) = P(\text{型 II 誤差}) = P(\text{接受 } H_0 \mid H_0 \text{ 為假})$$

決策與兩種誤差、風險、決策與錯誤

決策 \ 真實情況	真實情況	
	H_0 為真	H_0 為假
接受 H_0	決策正確	型 II 錯誤
拒絕 H_0	型 I 錯誤	決策正確

✚ 顯著水準：顯著水準 $\alpha = \max P(\text{型 I 誤差}) = \max P(I)$

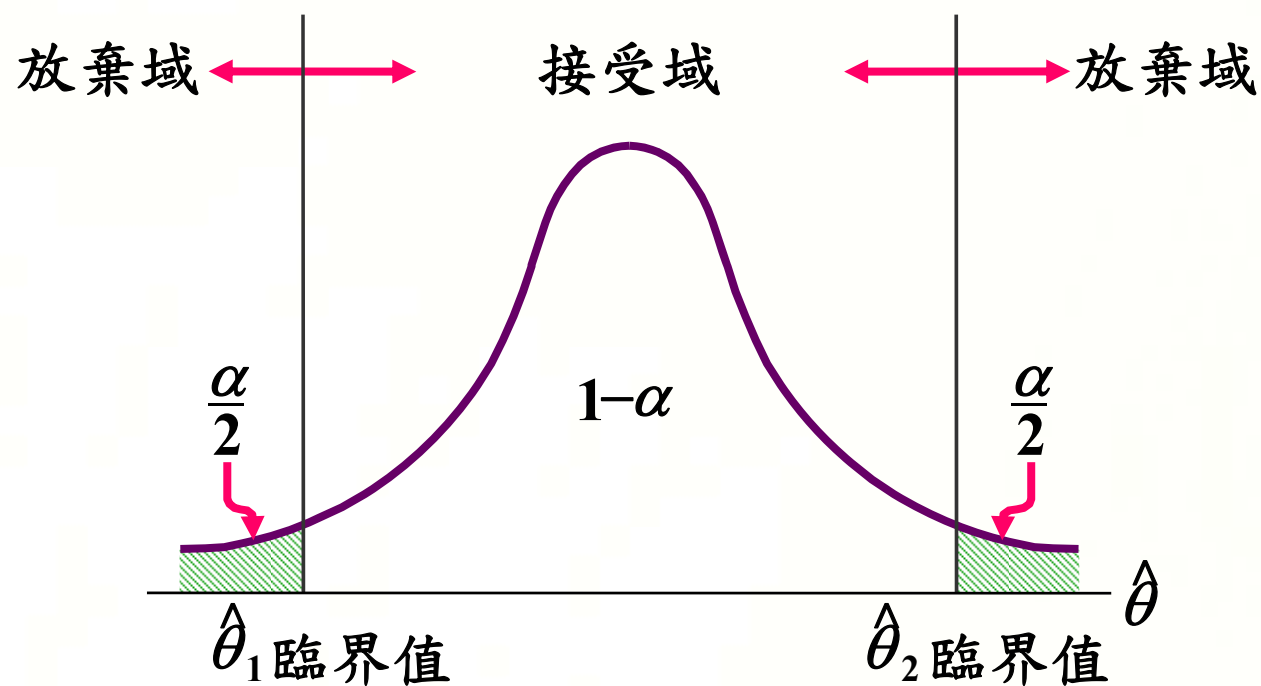
1. 當 $\alpha = 0.01$ 時，放棄 H_0 ，稱為“非常顯著”
2. 當 $\alpha = 0.05$ 之下，放棄 H_0 ，稱為“顯著”



9-1 統計假設檢定概念

● 假設檢定模式的建立：

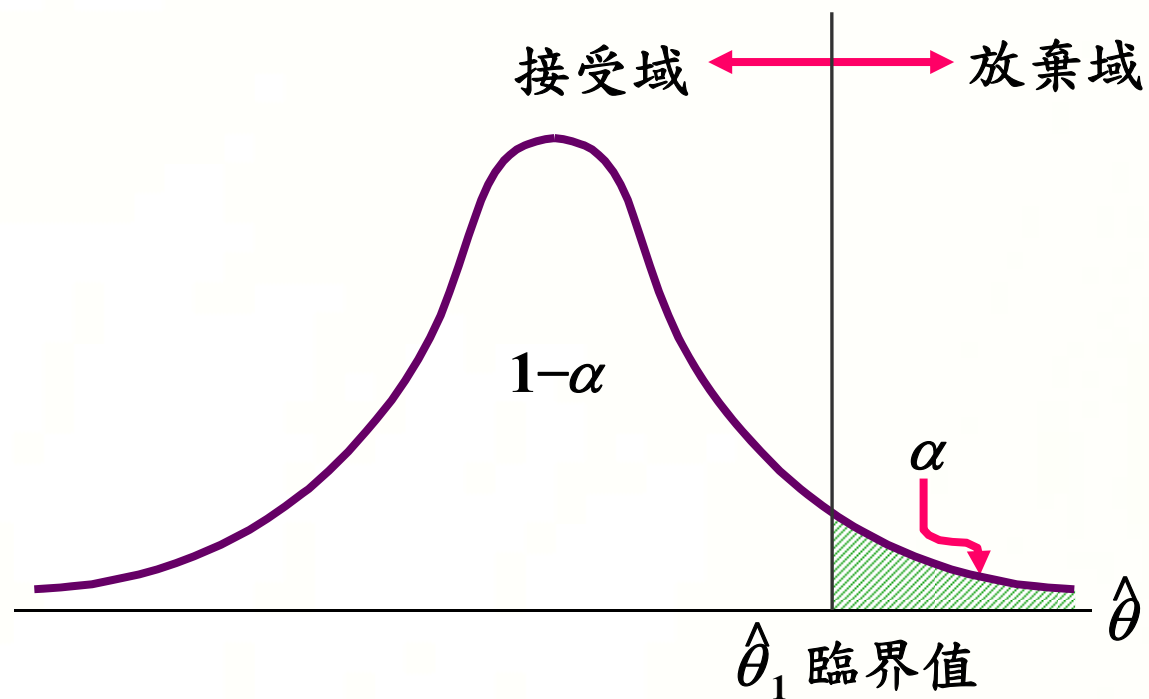
✚ 雙尾檢定：



9-1 統計假設檢定概念

● 假設檢定模式的建立：

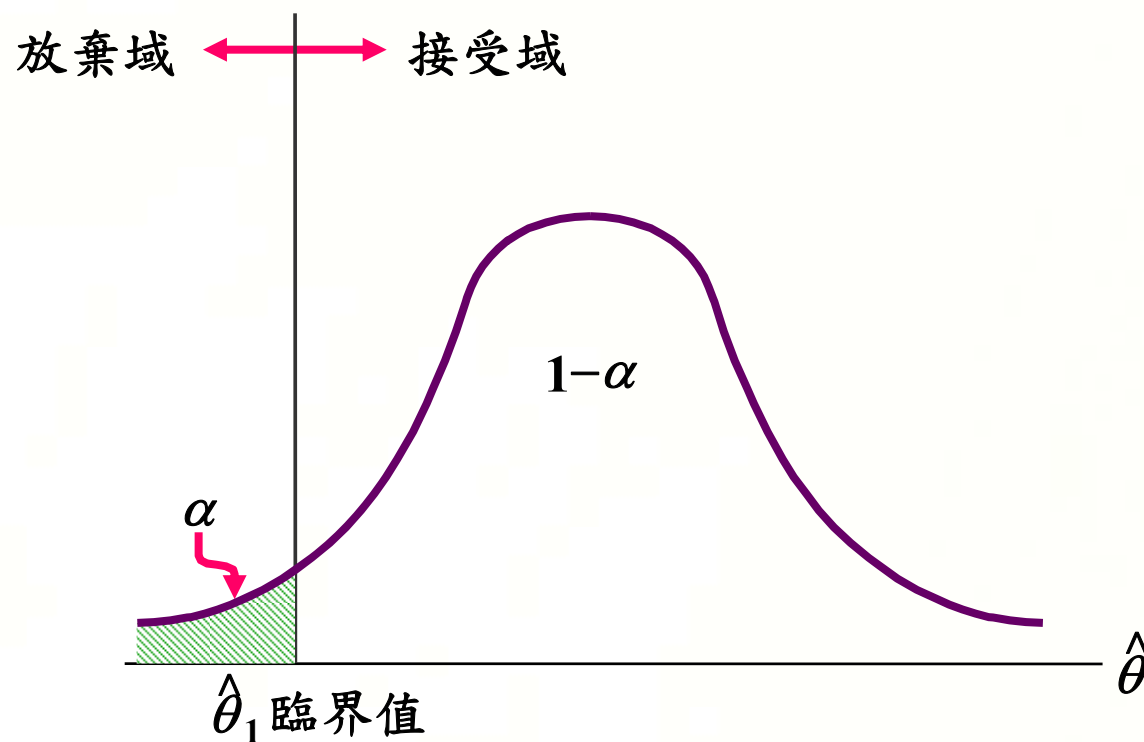
✚ 右尾檢定：



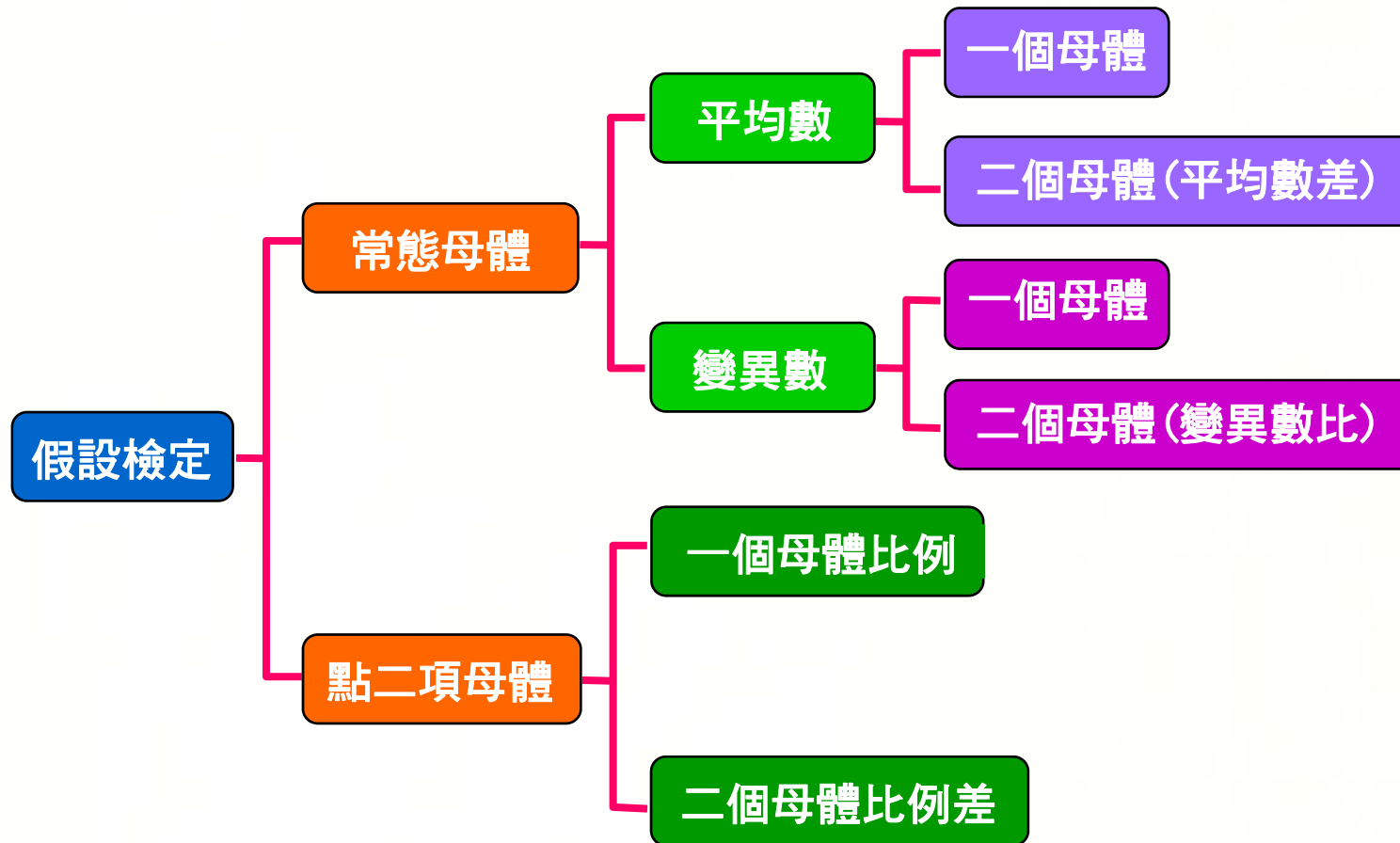
9-1 統計假設檢定概念

● 假設檢定模式的建立：

✚ 左尾檢定：



9-2 常態母體平均數假設的檢定



9-2 常態母體平均數假設的檢定

● 一個母體平均數的假設檢定：

母體分配	母體標準差	樣本大小	抽樣分配
常態	已知	大	Z
常態	已知	小	Z
常態	未知	大	Z
常態	未知	小	t
未知	已知	大	Z
未知	已知	小	—
未知	未知	大	Z
未知	未知	小	—

9-2 常態母體平均數假設的檢定

● 一個母體平均數的假設檢定：

1. 母體標準差已知，

母體平均數 μ 假設的檢定：
$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- ① 若 Z_0 值出現在放棄域，表示差異顯著，則放棄 H_0 ，接受 H_1 。
- ② 若 Z_0 值不出現在放棄域，而是在接受域，表示差異不顯著，則接受 H_0 。

2. 母體標準差未知，小樣本，

母體平均數假設的檢定：
$$t_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}}$$

- ① 若 t_0 值出現在放棄域內，表示差異顯著，則放棄 H_0 ，接受 H_1 。
- ② 若 t_0 值不出現在放棄域，而是在接受域，表示差異不顯著，則接受 H_0 。



例題 9-3

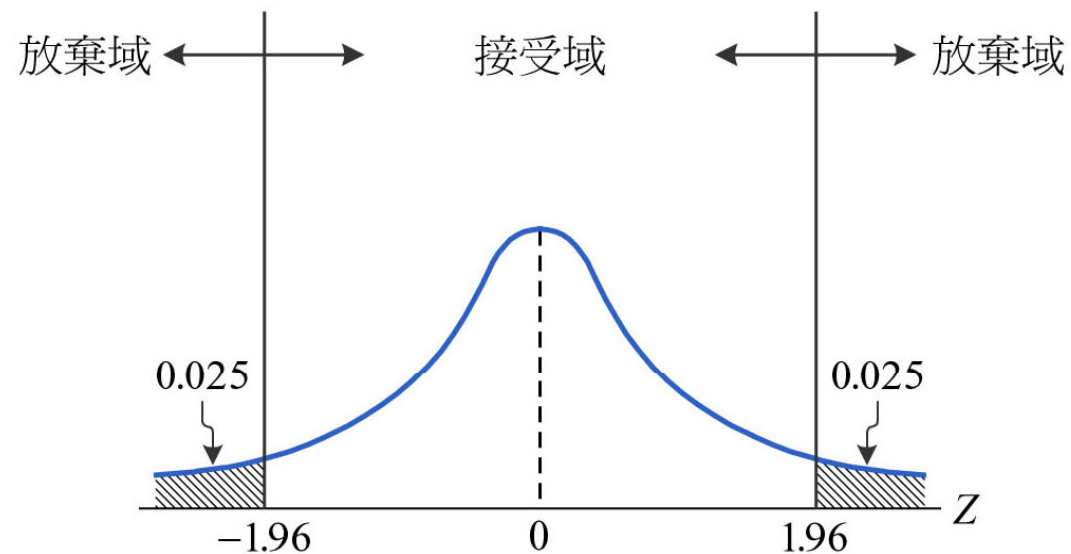
台光公司日光燈壽命呈常態分配，該公司宣稱日光燈平均壽命為 750 小時，標準差 35 小時，今隨機抽取 36 支日光燈，計算出其平均壽命為 737 小時，設顯著水準為 5%，試檢定該公司所宣稱的平均壽命是否為真？

解： (a) 假設： $H_0 : \mu = 750$ ； $H_1 : \mu \neq 750$ （雙尾檢定）

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 放棄域： $Z < -Z_{0.975} = -1.96$ 及 $Z > Z_{0.975} = 1.96$





(d) 計算： $\bar{X} = 737, \sigma = 35, n = 36$

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{737 - 750}{\frac{35}{\sqrt{36}}} = -2.23$$

(e) 判斷： $\because Z_0 = -2.23 < -1.96$ ，在左端的放棄域內，表示差異顯著， $\therefore$ 放棄 H_0 之假設，即該公司之宣稱並非真實。

例題 9-4

小販宣稱其蘋果每個平均重量大於 50 公克，今為了解其說法是否屬實，乃隨機抽取 100 個蘋果檢查，計算出其平均數 48.5 公克，標準差為 7.5 公克，設顯著水準為 0.01，試檢驗之。

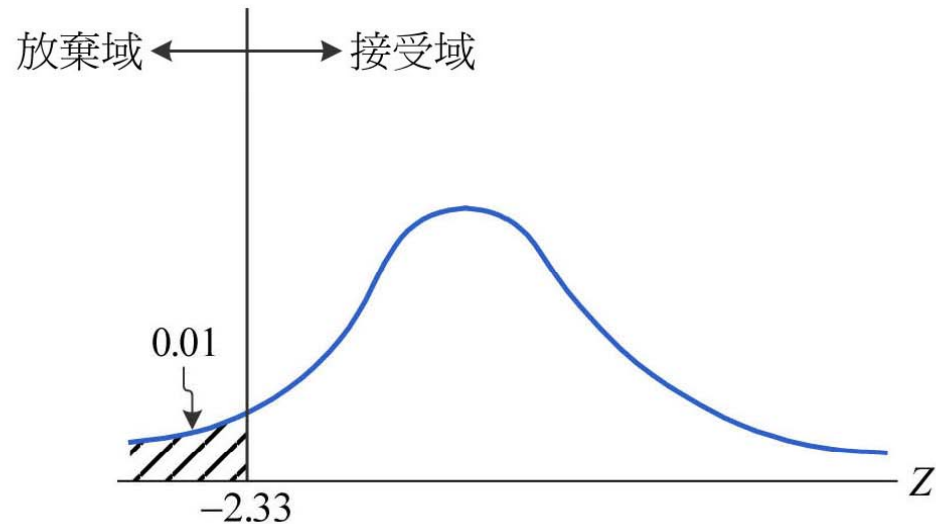
解：本題並未說明母體為常數分配，且標準差未知，但 $\because n = 100 > 30$ ，仍可用 Z 分配解之，母體標準差以樣本標準差取代之。

(a) 假設： $H_0: \mu \geq 50$ ； $H_1: \mu < 50$ （左尾檢定）

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.01$



(c) 放棄域： $Z < -Z_{0.99} = -2.33$



(d) 計算： $\bar{X} = 48.5, \hat{S} = 7.5, n = 100, \mu_0 = 50$

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}} = \frac{48.5 - 50}{\frac{7.5}{\sqrt{100}}} = -2$$

(e) 判斷： $\because Z_0 = -2 > -2.33$ ，落在接受域內，差異不顯著， $\therefore$ 接受 H_0 的假設，即該小販宣稱可能是真實的。



例題 9-5

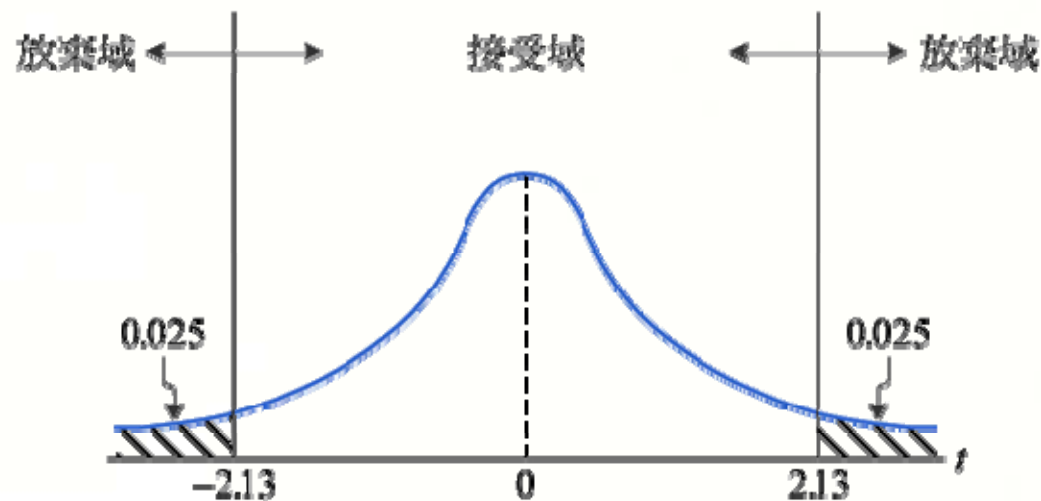
高雄市長途電話通話時間平均為 12.5 分，今自一組 $n=16$ 通話樣本中求算出其 $\bar{X}=11.6$ 分， $\hat{S}=4$ 分。假設通話時間分配為常態分配，試以 $\alpha=0.05$ 檢定平均通話時間是否已經改變？

解： (a) 假設： $H_0: \mu=12.5$ ， $H_2: \mu \neq 12.5$ （雙尾檢定）

(b) 顯著水準： $\alpha=0.05$



(c) 放棄域： $t < -t_{(0.975, 15)} = -2.13$ ，及 $t > t_{(0.975, 15)} = 2.13$



(d) 計算： $\bar{X} = 11.6, \hat{S} = 4, n = 16, \mu_0 = 12.5$

$$t_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}} = \frac{11.6 - 12.5}{\frac{4}{\sqrt{16}}} = -0.9$$

(e) 判斷： $\because t_0 = -0.9 > -2.13$ ，不落在放棄域，而在接受域，差異不顯著，接受 H_0 的假設，平均通話時間並未改變。 ❖



例題 9-6

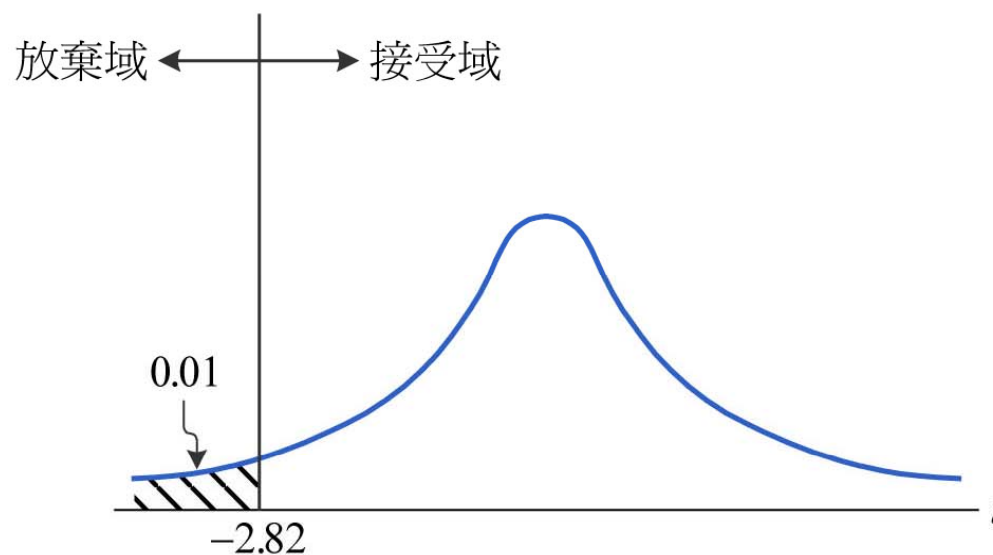
一項由某調查公司的資料顯示，台北市上班族平均每天工作時間為至少 10.2 小時，今抽取 10 名上班族調查其上班時間為 10.1, 9.7, 10.1, 9.8, 9.8, 10.3, 9.9, 10.2, 10.3, 10.4，假定每天工作時間為常態分配，設顯著水準為 1%，試驗定資料之宣稱是否屬實？



解： (a) 假設： $H_0 : \mu \geq 10.2$, $H_1 : \mu < 10.2$ (左尾檢定)

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.01$

(c) 放棄域： $t < -t_{(0.99, 9)} = -2.82$



(d) 計算： $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X = \frac{1}{10} (10.1 + 9.7 + \cdots + 10.4) = 10.06$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X - 10.06)^2 = 0.06$$

$$\therefore \hat{S} = 0.245$$

$$t_0 = \frac{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{S}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{10.06 - 10.2}{\frac{0.245}{\sqrt{10}}} = -1.818$$

(e) 判斷： $\because t_0 = -1.818 > -2.82$ ，不落於放棄域，而落於接受域， $\therefore$ 差異不顯著，接受 H_0 ，即此資料宣稱屬實。 ❖



例題 9-7

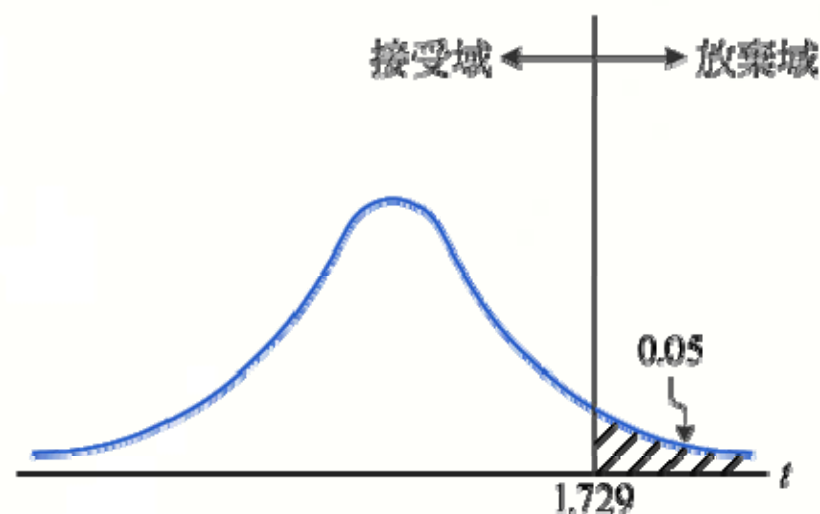
據醫學報告，鈉吃太多容易導致高血壓等症狀。每人每天所需之鹽份僅為 220 毫克。今抽取 20 包泡麵，計算出每包平均含鈉量為 244 毫克，標準差為 24.5 毫克，假設泡麵含鈉量之分配為常態分配，在 0.05 之顯著水準下，每碗泡麵平均含鈉量是否超過 220 毫克？

解： (a) 假設： $H_0: \mu \leq 220$ ， $H_1: \mu > 220$ (右尾檢定)

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$



(c) 放棄域： $t > t_{(0.95, 19)} = 1.729$



(d) 計算： $\bar{X} = 244, \hat{S} = 24.5, n = 20, \mu_0 = 220$

$$t_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}} = \frac{244 - 220}{\frac{24.5}{\sqrt{20}}} = 4.38$$

(e) 判斷： $\because t = 4.38 > 1.729$ ，落在放棄域，差異顯著，放棄 H_0 的假設，而接受 H_1 之假設，即不均每包泡麵含鈉量已超過 220 毫克。



9-2 常態母體平均數假設的檢定

● 二個母體平均數差的假設檢定：

母體分配	母體標準差	樣本大小	抽樣分配
兩個常態母體	已知	大	Z
兩個常態母體	已知	小	Z
兩個常態母體	未知，但 1. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 2. $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	小	t
		小	t
未知	未知	大	Z



9-2 常態母體平均數假設的檢定

● 兩個母體平均數差的假設檢定：

1. 兩母體標準已知，兩母體平均數 $\mu_1 - \mu_2$ 之假設的檢定：

$$Z_0 = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

- ① 若 Z_0 值出現在放棄域，則差異顯著，放棄 H_0 ，接受 H_1 。
- ② 若 Z_0 值不出現在放棄域，而是在接受域，則差異不顯著，接受 H_0 。

2. 兩母體標準差未知，但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 且獨立小樣本(獨立抽樣)，
兩母體平均數 $\mu_1 - \mu_2$ 之假設的檢定：

$$t_0 = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

- ① 若 t_0 值落在放棄域內，則差異顯著，放棄 H_0 ，接受 H_1 。
- ② 若 t_0 值不落在放棄域，而是在接受域，則差異不顯著，接受 H_0 。



例題 9-8

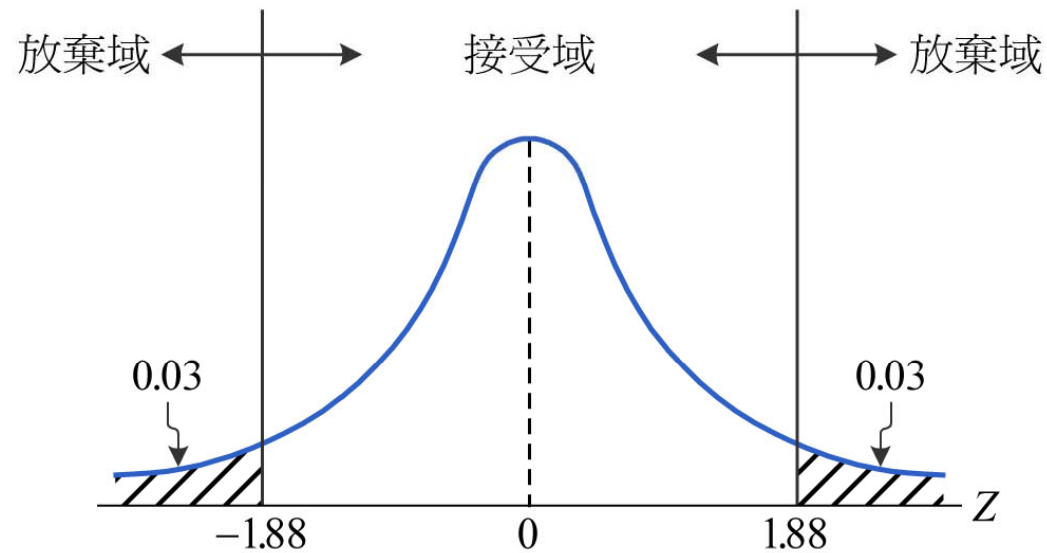
甲班統計學成績 $\sigma_1 = 5$ ，乙班為 $\sigma_2 = 3$ ，今自甲乙兩班分別隨機抽出 $n_1 = 25$ 及 $n_2 = 36$ 名學生，計算出其平均成績分別為 $\bar{X}_1 = 80$ 分， $\bar{X}_2 = 75$ 分，假設兩班統計學成績呈常態分配，以 $\alpha = 0.06$ ，檢定兩班統計學成績是否有顯著差別？



解： (a) 假設： $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (雙尾檢定)

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.06$

(c) 放棄域： $Z < -Z_{0.97} = -1.88$ 及 $Z > Z_{0.97} = 1.88$



(d) 計算：甲班： $n_1 = 25$, $\bar{X}_1 = 80$, $\sigma_1 = 5$

乙班： $n_2 = 36$, $\bar{X}_2 = 75$, $\sigma_2 = 3$

$$Z_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{80 - 75}{\sqrt{\frac{5^2}{25} + \frac{3^2}{36}}} = 4.47 > 1.88$$

(e) 判斷： $\because Z_0 = 4.47 > 1.88$ ，落在放棄域，差異顯著，放棄 H_0 ，即兩班統計學平均成績的確不同。



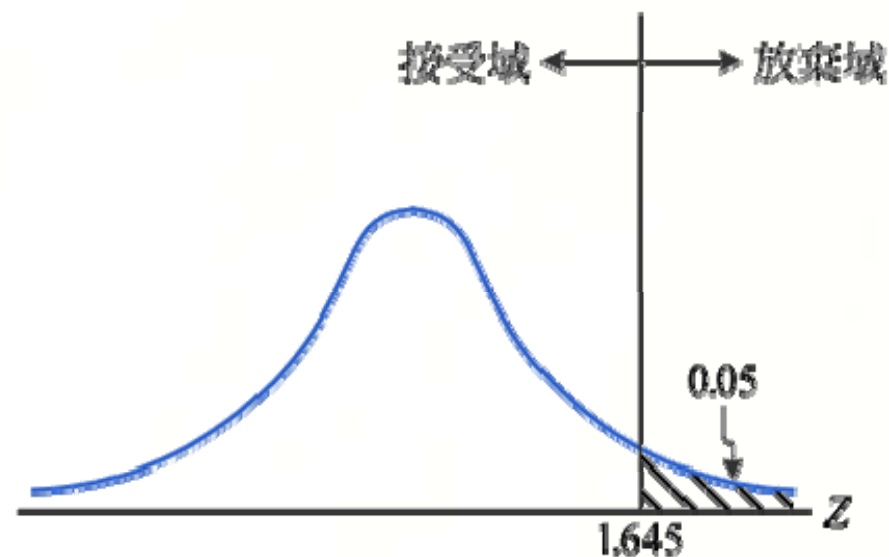
例題 9-9

台聚公司招考職員，在所選出的 64 位男性及 36 位女性應徵者中，男性的平均成績 82 分，標準差 8 分，女性平均成績 76 分，標準差 6 分，試在 $\alpha = 0.05$ 之下，男性平均成績是否優於女性？

解：(a) 假設： $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ ， $H_1: \mu_1 > \mu_2$ （右尾檢定）

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 放棄域： $Z > Z_{0.95} = 1.645$



(d) 計算：男性： $n_1 = 64$, $\bar{X}_1 = 82$, $\hat{S}_1 = 8$

女性： $n_2 = 36$, $\bar{X}_2 = 76$, $\hat{S}_2 = 6$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \\ &= \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}} \quad (\because \text{樣本夠大，以 } \hat{S}^2 \text{ 取代 } \sigma^2) \\ &= \frac{82 - 76}{\sqrt{\frac{8^2}{64} + \frac{6^2}{36}}} = 4.24 \end{aligned}$$

(e) 判斷： $\because Z_0 = 4.24 > 1.645$ ，落在放棄域， $\therefore$ 差異顯著，放棄 H_0 ，接受 H_1 ，即應徵者中男性成績平均優於女性成績。 ❖



例題 9-10

陳老師對統計學教學採不同教學方式，甲班為黑板教學，乙班為電視教學，兩班統計學成績假設呈常態分配，且變異數相等，今隨機抽樣若干人，其成績如下：

$$\text{甲班： } n_1 = 12, \bar{X}_1 = 84, \hat{S}_1 = 4$$

$$\text{乙班： } n_2 = 18, \bar{X}_2 = 77, \hat{S}_2 = 6$$

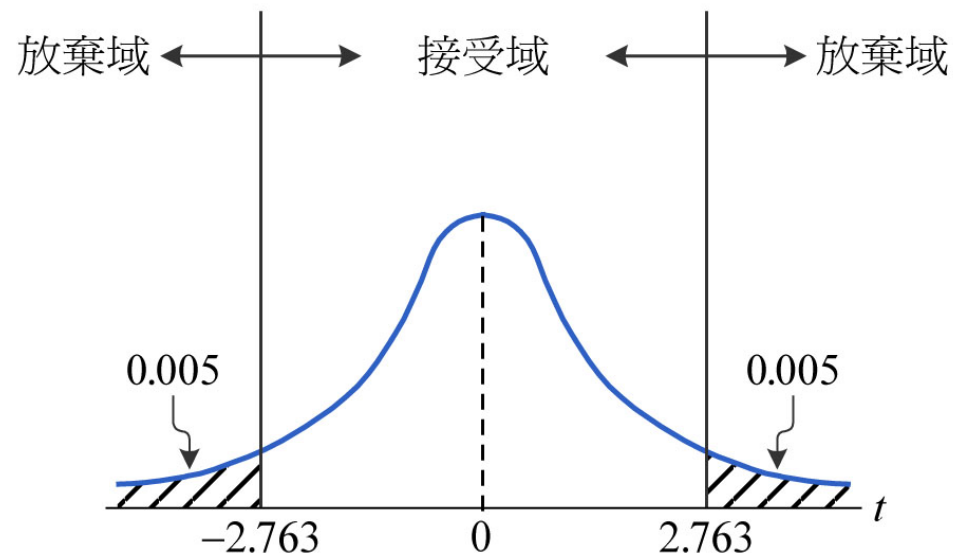
試在 $\alpha = 0.01$ 下，檢定甲乙兩班統計學成績是否有顯著不同？



解： (a) 假設： $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (雙尾檢定)

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.01$

(c) 放棄域： $t < -t_{(0.995, 28)} = -2.763$ 及 $t > t_{(0.995, 28)} = 2.763$



(d) 計算：甲班： $n_1 = 12$, $\bar{X}_1 = 84$, $\hat{S}_1 = 4$

乙班： $n_2 = 18$, $\bar{X}_2 = 77$, $\hat{S}_2 = 6$

$$S_P = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\hat{S}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{S}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{(12 - 1)16 + (18 - 1)36}{12 + 18 - 2}} = 5.30$$

$$t_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{84 - 77}{(5.30) \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{18}}} = 3.54$$

(e) 判斷： $\because t_0 = 3.54 > 2.763$, 落在放棄域，差異顯著， $\therefore$ 放棄 H_0 , 即

兩班統計學成績有顯著的不同。



例題 9-11

設甲乙兩店每日的營業額呈常態分配，且變異數相等，今自兩店抽出部分天數，其營業額（單位：千元）如下表所示，設 $\alpha = 0.05$ ，試檢定甲店之平均營業額是否比乙店好？

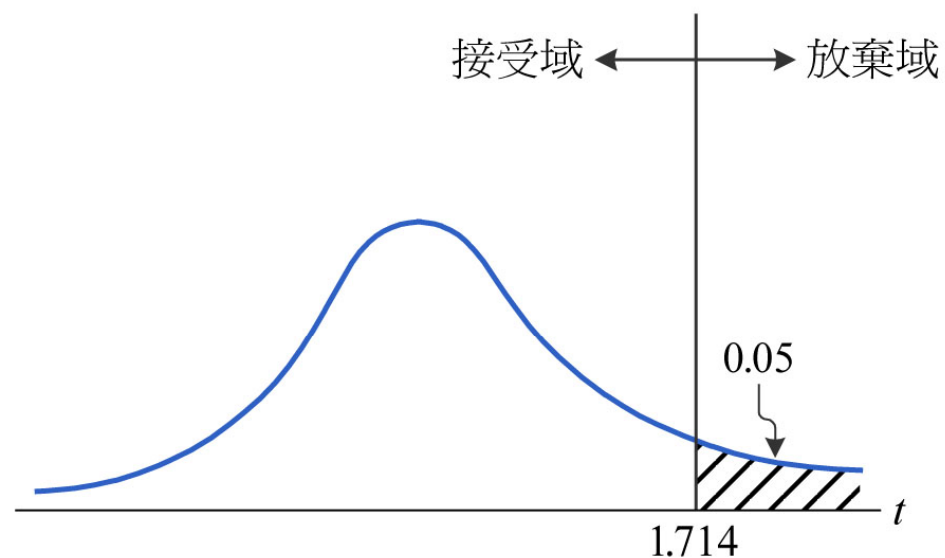
甲 店	44	56	44	47	46	53	58	38	41	30	46	35	49
乙 店	39	51	42	57	41	32	40	39	55	29	35	47	



解： (a) 假設： $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$, $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ (右尾檢定)

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 放棄域： $t > t_{(0.95, 23)} = 1.714$, $f = 13 + 12 - 2 = 23$



(d) 計算：甲店： $n_1 = 13$, $\bar{X}_1 = \frac{\sum X_{1n1}}{13} = 45.15$

$$\hat{S}_1^2 = \frac{1}{13-1} \sum (X - 45.15)^2 = 63.97$$

乙店： $n_2 = 12$, $\bar{X}_2 = \frac{\sum X_{2n2}}{12} = 42.25$

$$\hat{S}_2^2 = \frac{1}{12-1} \sum (X - 42.25)^2 = 76.39$$

$$S_P = \sqrt{\frac{(13-1)(63.97) + (12-1)(76.39)}{13+12-2}} = 8.36$$

$$t_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{45.15 - 42.25}{(8.36) \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{12}}} = 0.87$$

(e) 判斷： $\because t_0 = 0.87 < 1.714$ ，不落在放棄域，而落在接受域， $\therefore$ 差異不顯著，接受 H_0 ，即甲店平均營業額未必比乙店好。 ❖



9-2 常態母體平均數假設的檢定

● 兩個母體平均數差的區間估計：

3. 兩母體標準差未知且不等 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ，
兩獨立樣本為小樣本，

其兩母體平均數 $\mu_1 - \mu_2$ 之假設的檢定：

$$t_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}}$$

4. 兩體體標準差未知，樣本為小樣本
且不獨立(即成對抽樣)，

兩母體平均數差 $\mu_1 - \mu_2$ 之假設的檢定：

$$t_0 = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{\hat{S}_D}{\sqrt{n}}}$$

- ① 若 t_0 值落在放棄域內，則差異顯著，放棄 H_0 ，接受 H_1 。
② 若 t_0 值不落在放棄域，而是在接受域，則差異不顯著，接受 H_0 。



例題 9-12

設甲乙兩廠每日出貨量呈常態分配，下表為兩廠部分天數的出貨量（單位：噸），設顯著水準 $\alpha = 0.1$ ，試檢定兩廠平均出貨量是否有顯著差異（設兩廠變異數不等）？

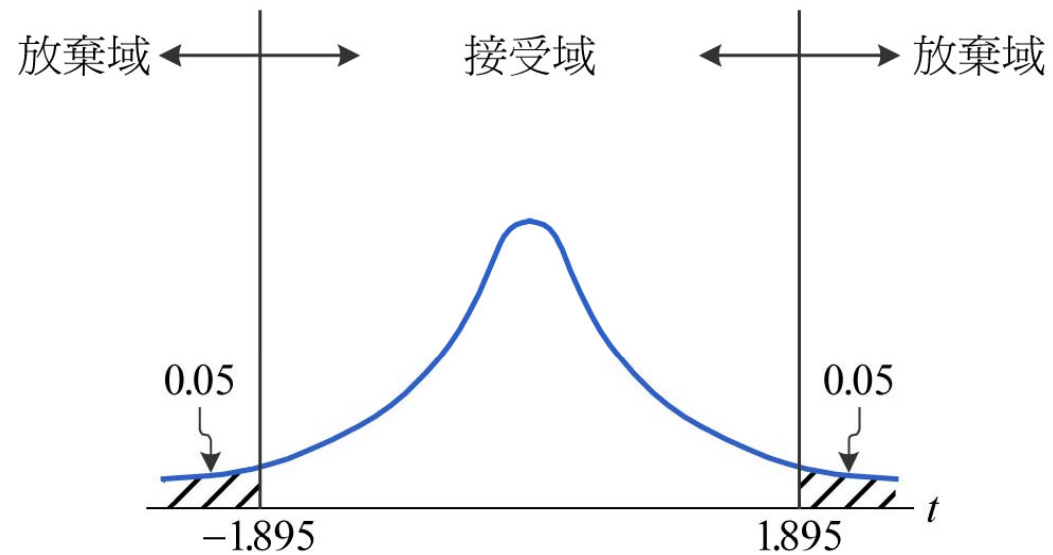
甲工廠	110	103	94	98	87		
乙工廠	82	123	97	92	118	88	175



解： (a) 假設： $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.1$

(c) 放棄域： $t < -t_{(0.95, 7)} = -1.895$ 及 $t > t_{(0.95, 7)} = 1.895$



(d) 計算：甲廠： $n_1 = 5$, $\bar{X}_1 = 98.4$

$$\hat{S}_1^2 = \frac{1}{5-1} \Sigma (X - 98.4)^2 = 76.3$$

乙廠： $n_2 = 7$, $\bar{X}_2 = 110.7$

$$\hat{S}_2^2 = \frac{1}{7-1} \Sigma (X - 110.7)^2 = 1,035.9$$

$$\text{自由度 } f = \frac{\left(\frac{76.3}{5} + \frac{1,035.9}{7} \right)^2}{\frac{\left(\frac{76.3}{5} \right)^2}{5-1} + \frac{\left(\frac{1,035.9}{7} \right)^2}{7-1}} = \frac{26,647.30}{3,707.89} \\ = 7.19 \doteq 7$$

$$t_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}} = \frac{98.4 - 110.7}{\sqrt{\frac{76.3}{5} + \frac{1,035.9}{7}}} = -0.96$$

(e) 判斷： $\because t_0 = -0.96 > -1.895$ ，不落在放棄域，而在接受域，差異不顯著， $\therefore$ 接受 H_0 ，即兩廠平均出貨量並無顯著不同。



例題 9-13

十位青年參加體能訓練，下表為訓練前後的體重資料，設體重呈常態分配，試在 $\alpha=0.05$ 之下，檢定十位青年訓練前後體重是否有明顯改變？

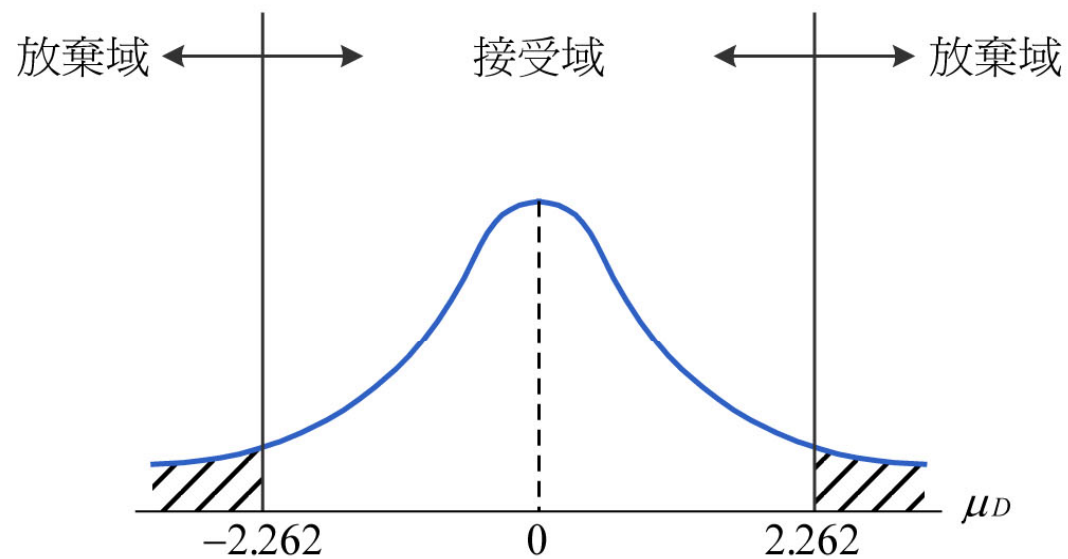
青 年	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
訓練前	62	68	70	60	60	59	62	61	63	70
訓練後	60	64	63	50	58	60	61	60	63	65



解： (a) 假設： $H_0 : \mu_D = 0$ (即 $\mu_1 = \mu_2$) , $H_1 : \mu_D \neq 0$ (即 $\mu_1 \neq \mu_2$)

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 放棄域： $t < -t_{(0.975, 9)} = -2.262$ 及 $t > t_{(0.975, 9)} = 2.262$



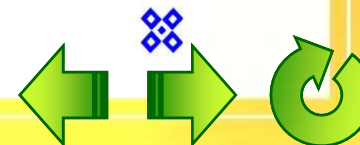
(d) 計算：

青 年	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
訓練前	62	68	70	60	60	59	62	61	63	70
訓練後	60	64	63	50	58	60	61	60	63	65
D	2	4	7	10	2	-1	1	1	0	5

$$\bar{D} = \frac{\Sigma D}{10} = 3.1, \hat{S}_D^2 = \frac{1}{10-1} \Sigma (D - 3.1)^2 = 11.628$$
$$\hat{S}_D = 3.41$$

$$t_0 = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{\hat{S}_D}{\sqrt{n}}} = \frac{3.1}{\frac{3.41}{\sqrt{10}}} = 2.87$$

(e) 判斷： $\because t_0 = 2.87 > 2.262$ ，落在放棄域， $\therefore$ 差異顯著，放棄 H_0 ，即訓練前後體重有明顯改變 ($\because \bar{D} = 3.1 > 0$ 明顯減少)。



9-3 常態母體變異數假設的檢定

● 一個母體變異數的假設檢定：

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_0^2}$$

- ① 若 χ_0^2 值落在放棄域內，則差異顯著，放棄 H_0 ，接受 H_1 。
- ② 若 χ_0^2 值不落在放棄域，而在接受域，差異不顯著，則接受 H_0 。

● 兩個母體變異數比的假設檢定：

$$F_0 = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}$$

- ① 若 F_0 值落在放棄域內，則差異顯著，放棄 H_0 ，接受 H_1 。
- ② 若 F_0 值不落在放棄域，而落在接受域，則接受 H_0 。



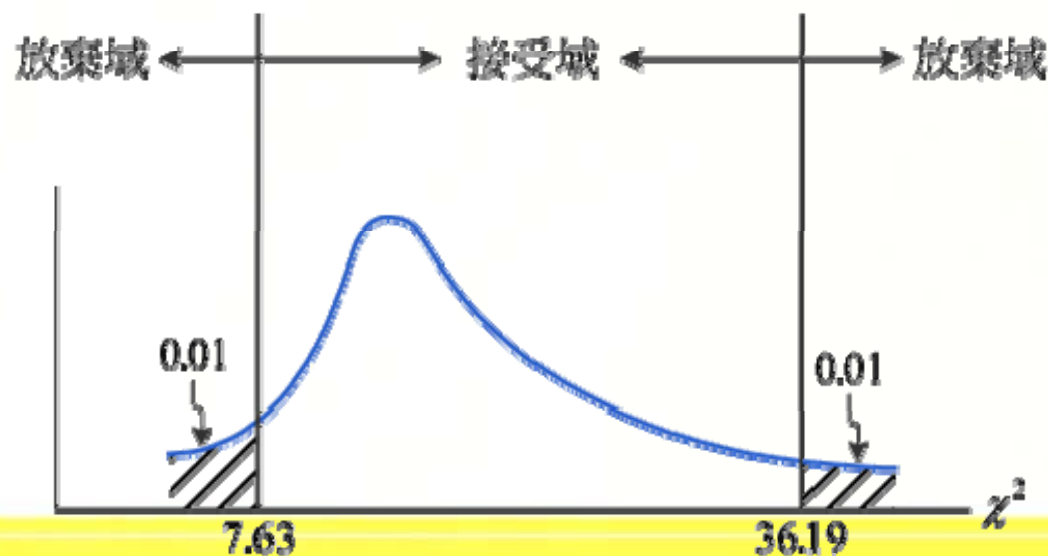
例題 9-14

甲班國文成績呈常態分配，陳老師宣稱甲班國成績變異數為 25 分，今隨機抽取甲班學生 20 名，計算其平均數 72 分，標準差 4 分，設 $\alpha = 0.02$ 下，檢定陳老師宣稱是否屬實？

解： (a) 假設： $H_0 : \sigma^2 = 25$, $H_2 : \sigma^2 \neq 25$ (雙尾檢定)

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.02$

(c) 放棄域： $\chi^2 < \chi^2_{(0.01,19)} = 7.63$ 及 $\chi^2 > \chi^2_{(0.99,19)} = 36.19$, $f = n - 1 = 19$



(d) 計算： $n = 20, \hat{S}^2 = 4^2 = 16$

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1)16}{25} = 12.16$$

(e) 判斷： $\because \chi_0^2 = 12.16 < 36.19$ ，落在接受域，差異不顯著，接受 H_0 ，
即陳老師宣稱可能是對的。 ❖



例題 9-15

A 牌原子筆規格 $\mu=10, \sigma^2=0.03$ 公分。今抽取 $n=10$ 支檢驗，其長度分別為 9.8, 10.2, 10.3, 10.4, 9.9, 10.0, 10.2, 10.4, 10.5, 9.9，假設長度為常態分配，試以 $\alpha=0.01$ ，檢驗 A 牌原子筆均勻程度與長度是否有改變？



解： (a) 所謂均勻程度，即檢定其變異數是否改變

① 假設： $H_0 : \sigma^2 = 0.03$, $H_1 : \sigma^2 \neq 0.03$ (雙尾檢定)

② 顯著水準： $\alpha = 0.01$

③ 放棄域： $\chi^2 < \chi^2_{(0.005, 9)} = 1.73$ 及 $\chi^2 > \chi^2_{(0.995, 9)} = 23.59$

④ 計算： $n = 10$, $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{101.6}{10} = 10.16$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{10-1} \Sigma (X - 10.16)^2 = 0.06$$

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1)0.06}{0.03} = 18$$

⑤ 判斷： $\because \chi_0^2 = 18 < 23.59$, 不落在放棄域，差異不顯著，接受 H_0 ,
即均勻程度沒有改變。



(b) 變異數 $\sigma^2 = 0.03$ 已知，以 Z 分配解之

① 假設： $H_0 : \mu = 10$, $H_1 : \mu \neq 10$ (雙尾檢定)

② 顯著水準： $\alpha = 0.01$

③ 放棄域： $Z < -Z_{0.995} = -2.575$ 及 $Z > Z_{0.995} = 2.575$

④ 計算： $n = 10$, $\bar{X} = 10.16$, $\sigma^2 = 0.03$, $\sigma = 0.173$

$$Z_0 = \frac{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{10.16 - 10}{0.173}}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = 2.925$$

⑤ 判斷： $\because Z_0 = 2.925 > 2.575$, 落在放棄域， $\therefore$ 差異顯著，放棄 H_0 ,
即長度已有改變。 ❖



例題 9-16

自兩獨立常態母體中抽取兩組隨機樣本，其資料如下：

$$\text{第 1 組： } n_1 = 9, \bar{X}_1 = 64, \hat{S}_1^2 = 36$$

$$\text{第 2 組： } n_2 = 13, \bar{X}_2 = 59, \hat{S}_2^2 = 25$$

設 $\alpha = 0.02$ ，試求：

- (a) 檢定 σ_1^2 與 σ_2^2 是否可能相等？
- (b) $\mu_1 - \mu_2$ 之信賴區間，是否能宣稱 μ_1 與 μ_2 可能相等？
- (c) 檢定 μ_1 與 μ_2 是否有顯著差異？

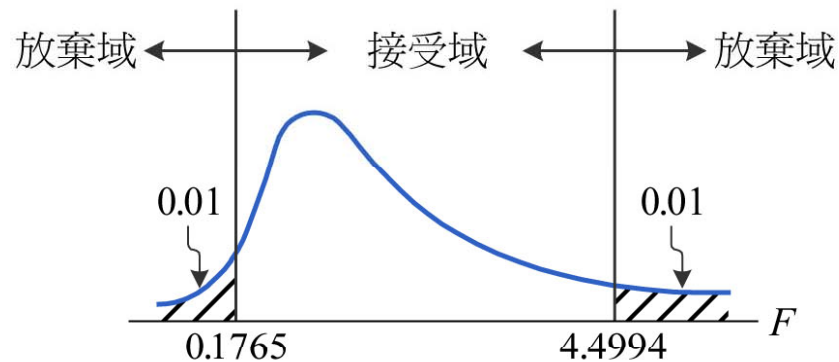


解： (a) ① 假設： $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (雙尾檢定)

② 顯著水準： $\alpha = 0.02$

③ 放棄域： $F < F_{(0.01, 8, 12)} = \frac{1}{F_{(0.99, 12, 8)}} = \frac{1}{5.6668} = 0.1765$ 及

$$F > F_{(0.99, 8, 12)} = 4.4994$$



④ 計算： $\hat{S}_1^2 = 36$, $\hat{S}_2^2 = 25$

$$F_0 = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} = \frac{36}{25} = 1.44$$

⑤ 判斷： $\because F_0 = 1.44 < 4.4994$, 不落在放棄域，而在接受域，差異不顯著，接受 H_0 , 即 σ_1^2 與 σ_2^2 可能相同。



(b) ① $\because \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ，兩獨立常態母體，且小樣本，可用 t 分配解之。

$$f = 9 + 13 - 2 = 20, \quad t_{(0.99, 20)} = 2.528$$

$$S_P = \sqrt{\frac{(9-1)36 + (13-1)25}{9+13-2}} = 5.422$$

$$\mu_1 - \mu_2 \sim (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \mp t_{(1-\frac{\alpha}{2}, f)} \cdot S_P \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$= (64 - 59) \mp (2.528)(5.422)(0.434)$$

$$= 5 \mp 5.95$$

$$\therefore -0.95 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 10.95$$

② $\because \mu_1 - \mu_2$ 之區間包括 0， $\therefore \mu_1$ 與 μ_2 可能相等。



(c) ① 假設： $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

② 顯著水準： $\alpha = 0.02$

③ 放棄域： $t < -t_{(0.99, 20)} = -2.528$ 及 $t > t_{(0.99, 20)} = 2.528$

④ 計算：
$$t_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{64 - 59}{(5.422) \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{13}}} = 2.13$$

⑤ 判斷： $\because t_0 = 2.13 < 2.528$ ，不落在放棄域，落在接受域，差異不顯著， $\therefore$ 接受 H_0 ，即 μ_1 與 μ_2 並無顯著的不同。 ❖



例題 9-17

設 A、B 品牌尼古丁含量為獨立常態分配，今各抽取 $n=5$ 支香煙檢驗其尼古丁含量如下表所示，設 $\alpha=0.05$ 之下，試求：

- (a) A、B 品牌尼古丁含量之分配變異數是否一致？
- (b) A、B 品牌尼古丁含量之分配的平均成份是否相等？

A 品牌	3.9	3.0	3.7	4.5	4.1
B 品牌	4.2	3.9	3.6	4.4	4.5



解： (a) ① 假設： $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

② 顯著水準： $\alpha = 0.05$

③ 放棄域： $F < F_{(0.025, 4, 4)} = \frac{1}{F_{(0.975, 4, 4)}} = \frac{1}{9.6045} = 0.104$ 及

$$F > F_{(0.975, 4, 4)} = 9.6045$$

④ 計算： $\bar{X}_1 = \frac{\Sigma X_{1n1}}{n} = \frac{19.2}{5} = 3.84$

$$\bar{X}_2 = \frac{\Sigma X_{2n2}}{n} = \frac{20.6}{5} = 4.12$$

$$\hat{S}_1^2 = \frac{1}{5-1} \Sigma (X_{1n1} - 3.84)^2 = 0.308$$

$$\hat{S}_2^2 = \frac{1}{5-1} \Sigma (X_{2n2} - 4.12)^2 = 0.137$$

$$F_0 = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} = \frac{0.308}{0.137} = 2.248$$

⑤ 判斷： $\because F_0 = 2.248 < 9.6045$ ，落在接受域，接受 H_0 ，即 A、B 品牌尼克丁含量之分配的變異數可能相等。



(b) 由 (a) 之檢定可知 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ，小樣本，獨立常態分配，可用 t 分配求解。

① 假設： $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ， $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

② 顯著水準： $\alpha = 0.05$

③ 放棄域： $t < -t_{(0.975, 8)} = -2.306$ 及 $t > t_{(0.975, 8)} = 2.306$

④ 計算：
$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\hat{S}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{S}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(5 - 1)0.308 + (5 - 1)0.137}{5 + 5 - 2}}$$
$$= \sqrt{0.2225}$$
$$= 0.472$$

$$t_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{3.84 - 4.12}{(0.472) \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}} = -0.939$$

⑤ 判斷： $\because t_0 = -0.939 > -2.306$ ，落在接受域，差異不顯著， $\therefore$ 接受 H_0 ，即平均成份可能相同。



9-4 點二項母體比例之假設檢定

- 一個母體比例P的假設檢定(設為大樣本情況)：

$$Z_0 = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

- ① 若 Z_0 值落在放棄域內，則差異顯著，放棄 H_0 ，接受 H_1 。
- ② 若 Z_0 值不落在放棄域，而在接受域，則接受 H_0 。

- 兩個母體比例差的假設檢定(設為大樣本情況)：

$$Z_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

- ① 若 Z_0 值落在放棄域內，則差異顯著，放棄 H_0 ，接受 H_1 。
- ② 若 Z_0 值不落在放棄域，而是接受域，則差異不顯著，接受 H_0 。



例題 9-18

高雄市針對某項公共政策問題，訪問 100 人，其中有 75 人贊成，設 $\alpha=5\%$ 之下，試求：

- (a) 全高雄市贊成的比例是否為 65%？
- (b) 全高雄市贊成的比例是否高於 65%？

解： (a) ① 假設： $H_0 : P = 0.65$, $H_1 : P \neq 0.65$ (雙尾檢定)

② 顯著水準： $\alpha = 0.05$

③ 放棄域： $Z < -Z_{0.975} = -1.96$ 及 $Z > Z_{0.975} = 1.96$

④ 計算： $\hat{P} = \frac{75}{100} = 0.75$, $n = 100$

$$Z_0 = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1 - P_0)}{n}}} = \frac{0.75 - 0.65}{\sqrt{\frac{(0.65)(0.35)}{100}}} = 2.096$$

⑤ 判斷： $\because Z_0 = 2.096 > 1.96$ ，落在放棄域，差異顯著， $\therefore$ 放棄 H_0 ，接受 H_1 ，即全高雄市贊成比例不為 65%。



(b) ① 假設： $H_0 : P \leq 0.65$, $H_1 : P > 0.65$ (右尾檢定)

② 顯著水準： $\alpha = 0.05$

③ 放棄域： $Z > Z_{0.95} = 1.645$

④ 計算：
$$Z_0 = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1 - P_0)}{n}}} = \frac{0.75 - 0.65}{\sqrt{\frac{(0.65)(0.35)}{100}}} = 2.096$$

⑤ 判斷： $\because Z_0 = 2.096 > 1.645$ ，落在放棄域，差異顯著， $\therefore$ 放棄 H_0
接受 H_1 ，即全高雄市贊成比例高於 65%。



例題 9-19

為了解 A 品牌在甲乙兩地的使用率，乃自甲地抽出 100 人，有 52 人使用 A 品牌，乙地抽出 125 人，有 34 人使用過，設 $\alpha = 0.04$ 之下，甲乙兩地 A 品牌的使用率是否有顯著的不同？



解： (a) 假設： $H_0 : P_1 = P_2$, $H_1 : P_1 \neq P_2$ (雙尾檢定)

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.04$

(c) 放棄域： $Z < -Z_{0.98} = -2.06$ 及 $Z > Z_{0.98} = 2.06$

(d) 計算： $\hat{P}_1 = \frac{52}{100}$, $\hat{P}_2 = \frac{34}{125}$

$$\hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} = \frac{52 + 34}{100 + 125} = \frac{86}{225}$$

$$Z_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}(1 - \hat{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{\frac{52}{100} - \frac{34}{125}}{\sqrt{\frac{86}{225}\left(\frac{139}{225}\right)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{125}\right)}} = 3.80$$

(e) 判斷： $Z_0 = 3.80 > 2.06$, 落在放棄域，則顯著差異，放棄 H_0 , 即甲乙兩地對 A 品牌的使用率有顯著的不同。 ❖



9-5 其他檢定方法

● 信賴區間法：

$$\bar{X} - Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- ① 若 H_0 之 μ_0 值落入信賴區間內，則接受 H_0 。
- ② 若 H_0 之 μ_0 值不落在信賴區間內，則放棄 H_0 。

● 臨界值檢定法：

$$(1) \quad \frac{C_1 - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \Rightarrow C_1 = \mu_0 - Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$(2) \quad \frac{C_2 - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \Rightarrow C_2 = \mu_0 + Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- ① 若 $\bar{X}$ 落在 C_1 與 C_2 之間，則接受 H_0 。
- ② 若 $\bar{X}$ 不落在 C_1 與 C_2 之間，則放棄 H_0 。



9-5 其他檢定方法

● P -值法：

$$P \text{ 值} = 2P\left(Z > \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 2P(Z > Z_0), \text{ 當 } \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > 0 \text{ 時,}$$

$$\text{或} = 2P\left(Z < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 2P(Z < Z_0), \text{ 當 } \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 0 \text{ 時。}$$

① 若 P 值 $< \alpha$ ，則放棄 H_0 。

② 若 P 值 $\geq \alpha$ ，則接受 H_0 。



例題 9-20

某西瓜小販宣稱，其每個西瓜平均重量為 10 公斤，標準差 0.5 公斤，今隨機抽出 $n=36$ 個西瓜秤其重量，其平均重量為 9.8 公斤，設 $\alpha=0.05$ 下，試以下列四種方法，檢定該宣稱是否屬實？（設母體資料為常態分配）

- (a) 統計量檢定法
- (b) 信賴區間法
- (c) 臨界值檢定法（古典法）
- (d) P -值法



解： (a) 統計量檢定法：

① 假設： $H_0 : \mu = 10$, $H_1 : \mu \neq 10$ (雙尾檢定)

② 顯著水準： $\alpha = 0.05$

③ 放棄域： $Z < -Z_{0.975} = -1.96$ 及 $Z > Z_{0.975} = 1.96$

④ 計算： $n = 36$, $\bar{X} = 9.8$, $\sigma = 0.5$

$$Z_0 = \frac{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{9.8 - 10}{0.5} = -2.4$$

⑤ 判斷： $\because Z_0 = -2.4 < -1.96$, 落在放棄域，差異顯著， $\therefore$ 放棄 H_0 ,
即該宣稱並不屬實。



(b) 信賴區間法：

① 假設： $H_0 : \mu = 10$, $H_1 : \mu \neq 10$ (雙尾檢定)

② 信賴係數： $1 - \alpha = 0.95$

③ 信賴區間：

$$\bar{X} - Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow 9.8 - 1.96 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{36}} \leq \mu \leq 9.8 + 1.96 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{36}}$$

$$\Rightarrow 9.64 \leq \mu \leq 9.96$$

④ 判斷： H_0 之 $\mu = 10$ 的假設，並未落在 $9.64 \leq \mu \leq 9.96$ 之區間內， $\therefore$ 放棄 H_0 。



(c) 臨界值檢定法：

① 假設： $H_0 : \mu = 10$, $H_1 : \mu \neq 10$

② 顯著水準： $\alpha = 0.05$

③ 臨界區域： $C_1 = \mu_0 - Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10 - 1.96 \frac{0.5}{\sqrt{36}} = 9.84$

$$C_2 = \mu_0 + Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10 + 1.96 \frac{0.5}{\sqrt{36}} = 10.16$$

④ 判斷： $\because \bar{X} = 9.8$, 並未落在 $C_1 = 9.84$ 與 $C_2 = 10.16$ 之間, $\therefore$ 放棄 H_0 。



(d) P - 值法：

① 假設： $H_0 : \mu = 10$, $H_1 : \mu \neq 10$

② 顯著水準： $\alpha = 0.05$

③ P - 值： $2P(\bar{X} < 9.8) = 2P\left(Z < \frac{9.8 - 10}{\frac{0.5}{\sqrt{36}}}\right) = 2P(Z < -2.4)$

$$= 2 \times 0.0082 = 0.0164$$

④ 判斷： $\because P \text{ 值} = 0.0164 < \alpha = 0.05$, $\therefore$ 放棄 H_0 。



例題 9-21

克寧公司宣稱其奶粉每 100 公克所含的鐵質在 20 mg 內，今隨機抽取 10 罐奶粉，其含量如下：19.6, 19.3, 18, 21, 18.4, 20.7, 19.8, 21.5, 17.5, 19，設顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，試以下列方法檢定該公司宣稱是否屬實？（設母體資料為常態分配）

- (a) 統計量檢定法
- (b) 信賴區間法
- (c) 臨界值檢定法
- (d) P - 值法



解： (a) 統計量檢定法：

① 假設： $H_0 : \mu = 20$, $H_1 : \mu \neq 20$

② 顯著水準： $\alpha = 0.05$

③ 放棄域： $t < -t_{(0.975, 9)} = -2.262$ 及 $t > t_{(0.975, 9)} = 2.262$

④ 計算： $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{10} = \frac{194.8}{10} = 19.48$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{10-1} \Sigma (X - 19.48)^2 = 1.726, \hat{S} = 1.31$$

$$t_0 = \frac{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{S}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{19.48 - 20}{\frac{1.31}{\sqrt{10}}} = -1.26$$

⑤ 判斷： $\because t_0 = -1.26 > -2.262$ ，落在接受域， $\therefore$ 接受 H_0 ，即該宣稱屬實。



(b) 信賴區間法：

① 假設： $H_0 : \mu = 20$, $H_1 : \mu \neq 20$

② 信賴係數： $1 - \alpha = 0.95$

③ 信賴區間： $\bar{X} - t_{(1-\frac{\alpha}{2}, f)} \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{(1-\frac{\alpha}{2}, f)} \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$

$$\Rightarrow 19.48 - 2.262 \cdot \frac{1.31}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq 19.48 + 2.262 \cdot \frac{1.31}{\sqrt{10}}$$
$$\Rightarrow 18.54 \leq \mu \leq 20.42$$

④ 判斷： $\because H_0$ 之 $\mu = 20$ 的假設落在 $18.54 \leq \mu \leq 20.42$ 之區間內， $\therefore$ 接受 H_0 。



(c) 臨界值檢定法：

① 假設： $H_0 : \mu = 20$, $H_1 : \mu \neq 20$

② 顯著水準： $\alpha = 0.05$

③ 臨界區域： $C_1 = \mu_0 - t_{(1-\frac{\alpha}{2}, f)} \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} = 20 - 2.262 \frac{1.31}{\sqrt{10}} = 19.06$

$$C_2 = \mu_0 + t_{(1-\frac{\alpha}{2}, f)} \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} = 20 + 2.262 \frac{1.31}{\sqrt{10}} = 20.94$$

④ 判斷： $\because \bar{X} = 19.48$, 落在臨界區域 C_1 與 C_2 之間， $\therefore$ 接受 H_0 。



(d) P - 值法：

① 假設： $H_0 : \mu = 20$, $H_1 : \mu \neq 20$

② 顯著水準： $\alpha = 0.05$

$$\begin{aligned}\text{③ } P\text{- 值} : 2P(\bar{X} < 19.48) &= 2P\left(t < \frac{19.48 - 20}{\frac{1.31}{\sqrt{10}}}\right) \\ &= 2P(t < -1.26) = 2P(t > 1.26) \\ &\because 0.2 < 2P(t > 1.26) \\ &(\because \text{查表得知, } P(t > 1.383) > 0.1 \Rightarrow P(t > 1.26) > 0.1) \\ &\therefore 0.2 < P\text{- 值, 即 } P\text{- 值} > 0.2\end{aligned}$$

④ 判斷： $\because P\text{ 值} > 0.2 > \alpha = 0.05$, $\therefore$ 接受 H_0 。



9-6 型 I 誤差與型 II 誤差的再說明

● α 與 β 的意義與計算方法：

- (1) $\alpha = P(\text{放棄 } \theta_0 | \theta_0 \text{ 真}) = 1 - P(\text{接受 } \theta_0 | \theta_0 \text{ 真}) \leftarrow \text{在 } \hat{\theta}_0 \text{ 之分配下。}$
- (2) $\beta = P(\text{接受 } \theta_0 | \theta_1 \text{ 真}) = 1 - P(\text{放棄 } \theta_0 | \theta_1 \text{ 真}) \leftarrow \text{在 } \hat{\theta}_1 \text{ 之分配下。}$

● 檢定力函數與作業特定函數：

✚ 檢定力函數：

$$PF(\theta) = 1 - \beta = P(\text{放棄 } H_0 | H_1 \text{ 為真})$$

✚ 作業特性函數：

$$\beta = OC(\theta) = P(\text{接受 } H_0 | H_1 \text{ 為真})$$

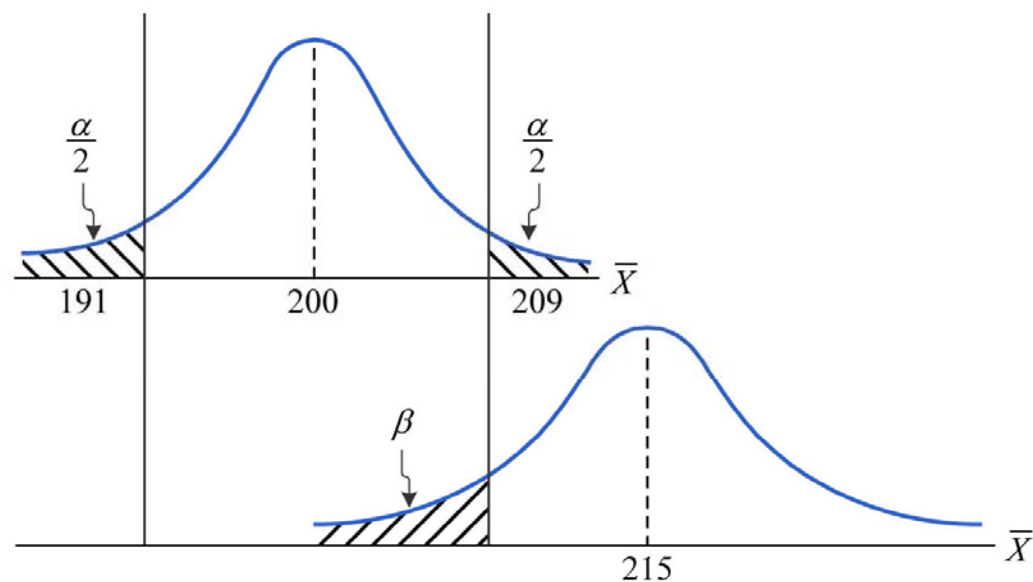


例題 9-22

某可樂銷售商銷售大杯可樂，平均容量為 200 公撮，標準差 15 公撮，今抽取 9 杯計算其平均容量，若 $\bar{X}$ 在 $191 < \bar{X} < 209$ 內，則判定可樂製造機器屬正常，即接受 $\mu=200$ 之假設，若在區域外，則拒絕 $\mu=200$ 的假設，設可樂容量呈常態分配，試求：

- (a) 當 $\mu=200$ 公撮成立時，犯型 I 誤差 α 之機率。
- (b) 若 $\mu=215$ 公撮，犯型 II 誤差 β 之機率。
- (c) 此檢定法則是否優良？





解： (a) 由上圖可知

$$\begin{aligned}
 \alpha &= P(\text{放棄 } \mu = 200 | \mu = 200) \\
 &= 1 - P(191 < \bar{X} < 209 | \mu = 200) \\
 &= 1 - P\left(\frac{191 - 200}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < Z < \frac{209 - 200}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right) \\
 &= 1 - P(-1.8 < Z < 1.8) \\
 &= 1 - (0.9641 - 0.0359) \\
 &= 0.0718
 \end{aligned}$$



(b) 由上圖可知

$$\begin{aligned}\beta &= P(191 < \bar{X} < 209 | \mu = 215) \\&= P\left(\frac{191 - 215}{\frac{15}{\sqrt{9}}} < Z < \frac{209 - 215}{\frac{15}{\sqrt{9}}}\right) \\&= P(-4.8 < Z < -1.2) \\&= 0.1151 - 0 \\&= 0.1151\end{aligned}$$

(c) 由於 α 與 β 均小，故為一優良檢定方式。 ❖

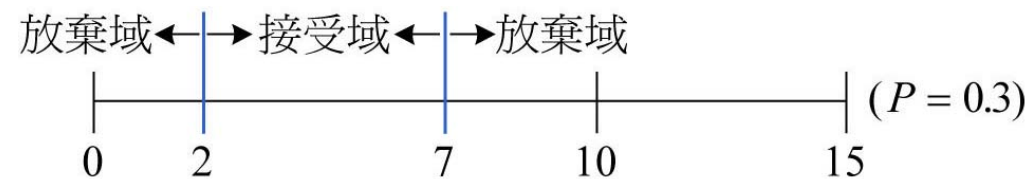


例題 9-23

高雄市教育局某官員宣稱高雄市成年人受大學教育之比率為 $P=0.3$ ，今為檢定此說法，隨機抽取 15 位成年人為樣本，若此樣本中有 2~7 位受大學教育，則承認虛無假設 $P=0.3$ 的說法，否則放棄 $P=0.3$ 。設在 $P=0.3$ 之下，求型 I 誤差，在 $P=0.2$ 及 $P=0.4$ 的對立假設下，求型 II 誤差。並問此檢定法則是否優良？



解：



$$(a) \alpha = P(\text{放棄 } P = 0.3 | P = 0.3) = 1 - P(2 \leq X \leq 7 | P = 0.3)$$

$$= 1 - \sum_{X=2}^7 C_X^{15} (0.3)^X (0.7)^{15-X}$$

$$= 1 - \left[\sum_{X=0}^7 C_X^{15} (0.3)^X (0.7)^{15-X} - \sum_{X=0}^1 C_X^{15} (0.3)^X (0.7)^{15-X} \right]$$

$$= 1 - (0.950 - 0.035) = 0.085$$



$$(b) \textcircled{1} \beta = (\text{接受 } P = 0.3 | P = 0.2)$$

$$= P(2 \leq X \leq 7 | P = 0.2)$$

$$= \sum_{X=2}^7 C_X^{15} (0.2)^X (0.8)^{15-X}$$

$$= \sum_{X=0}^7 C_X^{15} (0.2)^X (0.8)^{15-X} - \sum_{X=0}^1 C_X^{15} (0.2)^X (0.8)^{15-X}$$

$$= 0.996 - 0.167 = 0.829$$

$$\textcircled{2} \beta = (\text{接受 } P = 0.3 | P = 0.4)$$

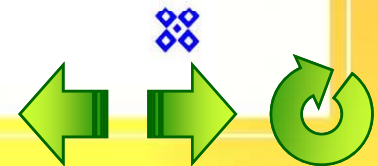
$$= P(2 \leq X \leq 7 | P = 0.4)$$

$$= \sum_{X=2}^7 C_X^{15} (0.4)^X (0.6)^{15-X}$$

$$= \sum_{X=0}^7 C_X^{15} (0.4)^X (0.6)^{15-X} - \sum_{X=0}^1 C_X^{15} (0.4)^X (0.6)^{15-X}$$

$$= 0.787 - 0.005 = 0.782$$

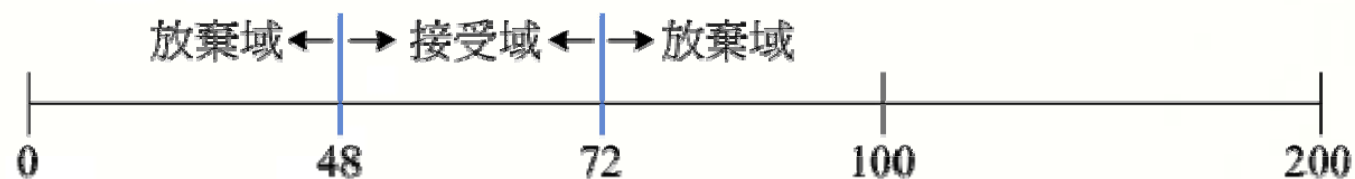
(c) 由上述可知， α 值雖然較小，但 β 值均太大，故不是良好的檢定方式。



例題 9-24

承上題，若隨機抽樣 $n=200$ 位而非 $n=15$ 位，而接受域定為 $48 \leq X \leq 72$ ，試做上題，並比較兩題的結果。

解：



$\because nP \geq 5$ 且 $nq \geq 5$ ，二項分配趨近於常態分配，惟間斷分配改為連續分配時，須加減 0.5。



(a) $n = 200, P = 0.3$

$$\mu = nP = 200 \times 0.3 = 60$$

$$\sigma = \sqrt{nPq} = \sqrt{200 \times 0.3 \times 0.7} = 6.48$$

$$\alpha = 1 - P(48 \leq X \leq 72 \mid P = 0.3)$$

$$= 1 - P\left(\frac{47.5 - 60}{6.48} \leq Z \leq \frac{72.5 - 60}{6.48}\right)$$

$$= 1 - P(-1.93 \leq Z \leq 1.93)$$

$$= 1 - (0.9732 - 0.0268)$$

$$= 0.0536$$

(b) ① $n = 200, P = 0.2$

$$\mu = nP = 200 \times 0.2 = 40$$

$$\sigma = \sqrt{nPq} = \sqrt{200 \times 0.2 \times 0.8} = 5.66$$

$$\beta = P(48 \leq X \leq 72 \mid P = 0.2)$$

$$= P\left(\frac{47.5 - 40}{5.66} \leq Z \leq \frac{72.5 - 40}{5.66}\right)$$

$$= P(1.33 \leq Z \leq 5.74)$$

$$= 1 - 0.9082$$

$$= 0.0918$$



$$\begin{aligned}
& \textcircled{2} \quad n = 200, P = 0.4 \\
& \mu = nP = 200 \times 0.4 = 80 \\
& \sigma = \sqrt{nPq} = \sqrt{200 \times 0.4 \times 0.6} = 6.93 \\
& \beta = P(48 \leq X \leq 72 \mid P = 0.4) \\
& \quad = P\left(\frac{47.5 - 80}{6.93} \leq Z \leq \frac{72.5 - 80}{6.93}\right) \\
& \quad = P(-4.69 \leq Z \leq -1.08) \\
& \quad = 0.1401 - 0 \\
& \quad = 0.1401
\end{aligned}$$

(c) 由【例題 9-23】【例題 9-24】比較，發現【例題 9-24】當 n 增大為 200 時， α 與 β 值均變小，即型 I 誤差與型 II 誤差均小，是為優良的檢定方式。



例題 9-25

現有一檢驗計畫，若由一批產品中抽樣 $n=10$ ，當不良品數 $X \leq 1$ 時，則允收該批產品，若 $X \geq 2$ ，則拒收該批產品，設不良率分別為 $P=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ ，試繪製作業特性函數與檢定力曲線。

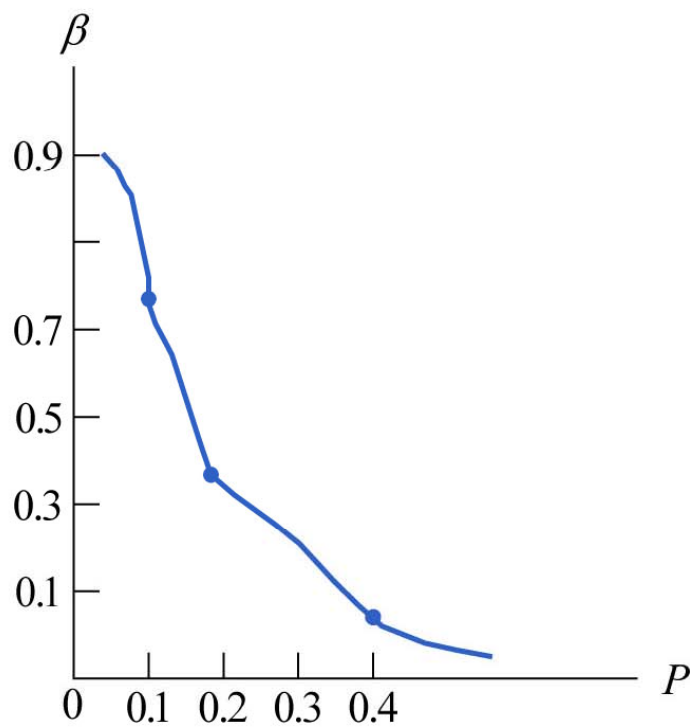
解：(a) $\beta = \sum_{X=0}^1 C_X^{10} P^X (1-P)^{10-X}$ ， $P=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ ， $X=0, 1$

(b) $1-\beta = 1 - \sum_{X=0}^1 C_X^{10} P^X (1-P)^{10-X}$ ， $X=0, 1$

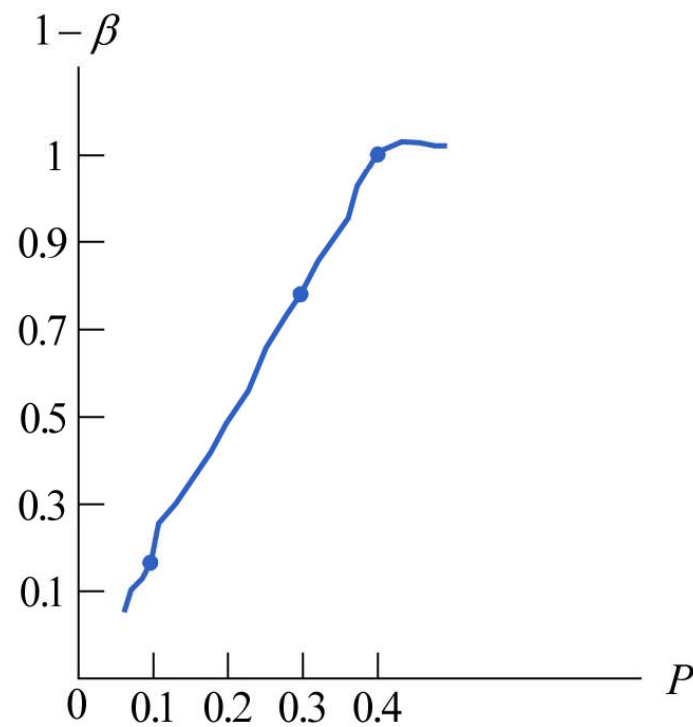
$P=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$

P	β	$1-\beta$
0.1	0.736	0.264
0.2	0.376	0.624
0.3	0.149	0.851
0.4	0.046	0.954





OC 曲線



PF 曲線

(c) 由曲線可知，當 $P=0.4$ 時，檢定效果 (0.954) 最佳，而 $P=0.1$ 時，檢定效果最差 (0.264)。



9-6 型 I 誤差與型 II 誤差的再說明

● 生產者風險與消費者風險：

✚ 生產者風險：

在品質管制的允收抽樣中，可能發生整批產品符合標準，但卻被拒收，稱為**生產者風險** (producer's risk)，以 α 表示，即**型 I 誤差**。

✚ 消費者風險：

在品質管制的允收抽樣中，可能發生整批產品未必符合標準，但卻接受，稱為**消費者風險** (consumer's risk)，以 β 表示，即**型 II 誤差**。



9-7 樣本大小的決定

● 母體平均數 μ 假定檢定的樣本大小：

✚ 雙尾檢定：
$$n = \frac{[Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} + Z_{\beta}]^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

✚ 右尾檢定：
$$n = \frac{[Z_{(1-\alpha)} + Z_{\beta}]^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

✚ 左尾檢定：
$$n = \frac{[Z_{\alpha} + Z_{(1-\beta)}]^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$



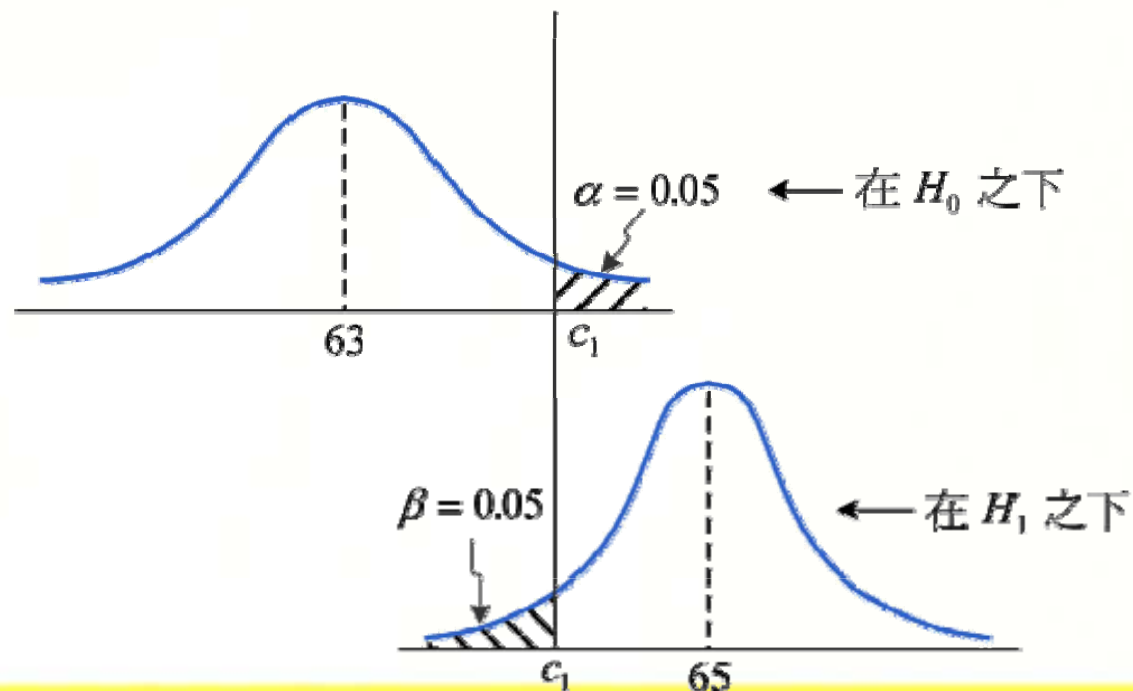
例題 9-26

欲檢定 $H_0: \mu = 63$, $H_1: \mu = 65$, 而此常態母體之 $\sigma = 4$, 若要控制 $\alpha = \beta = 0.05$ 之下, 則應抽出多少個樣本?

解: (a) 假設: $H_0: \mu = 63$, $H_1: \mu = 65$

(b) 顯著水準: $\alpha = 0.05$

(c) 圖示:



(d) 計算： $Z_{(1-\alpha)} = Z_{0.95} = 1.645$

$$Z_{\beta} = Z_{0.05} = -1.645$$

$$\sigma = 4$$

$$\therefore 63 + 1.645 \frac{4}{\sqrt{n}} = 65 - 1.645 \frac{4}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore n = \frac{(1.645 + 1.645)^2 \cdot 4^2}{(65 - 63)^2} = 43.3 \doteq 44$$

(e) 樣本大小：抽樣 $n = 44$ 。



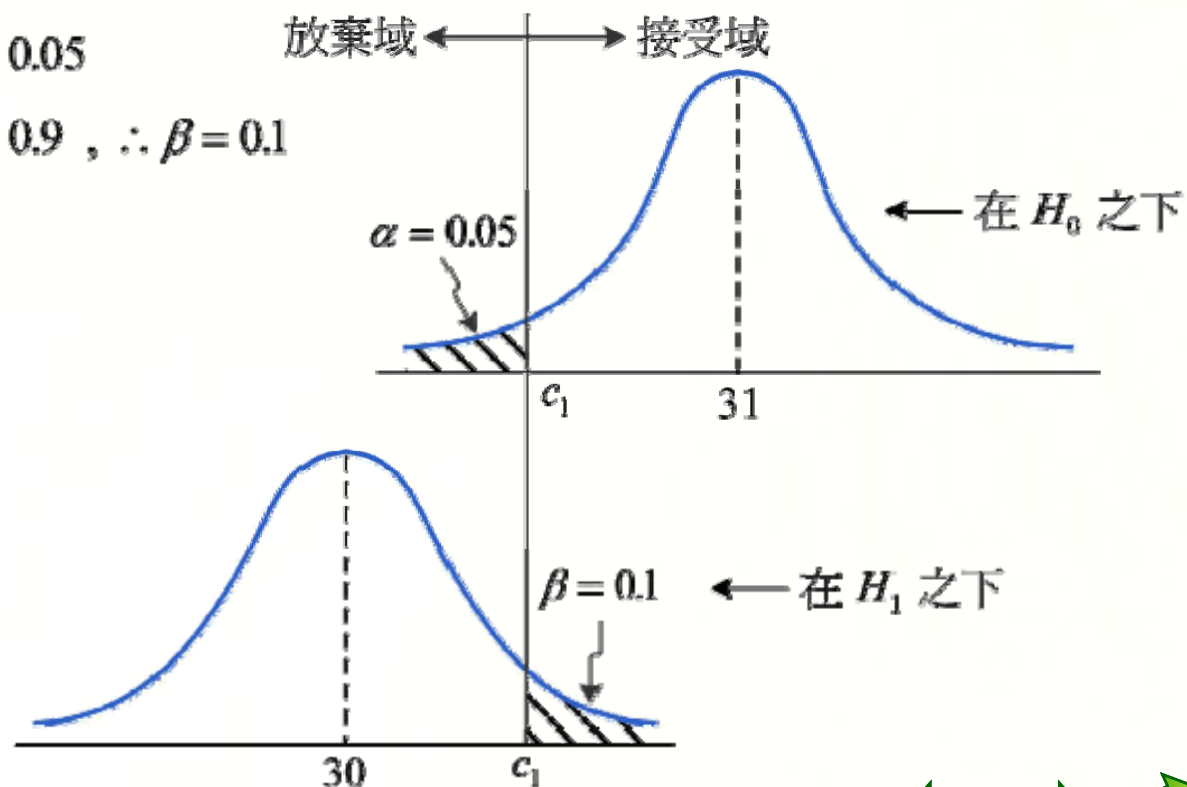
例題 9-27

設一常態母體標準差為 5，今欲檢定 $H_0: \mu = 31$ ， $H_1: \mu = 30$ ，若顯著水準為 5%，欲使檢定力為 90%，則應抽出多少樣本？

解： (a) 假設： $H_0: \mu = 31$ ， $H_1: \mu = 30$

(b) 顯著水準： $\alpha = 0.05$

(c) 圖示： $\because 1 - \beta = 0.9$ ， $\therefore \beta = 0.1$



(d) 計算： $\alpha = 0.05, Z_{0.05} = -1.645$

$\beta = 0.1, Z_{0.9} = 1.28$

$$\therefore 31 - 1.645 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} = 30 + 1.28 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore n = \frac{(1.28 + 1.645)^2 \cdot 5^2}{(31 - 30)^2} = 213.9 \doteq 214$$

(e) 樣本大小： $n = 214$ 。



9-7 樣本大小的決定

- 母體比例 P 假定檢定之樣本大小：

$$n = \left[\frac{Z_{(1-\alpha)} \sqrt{P_0(1-P_0)} + Z_{\beta} \sqrt{P_1(1-P_1)}}{P_1 - P_0} \right]^2$$



例題 9-28

台北市教育局想了解國中生患近視比例是否為 60%，假定真正近視比例為 70%，設 $\alpha = 0.05$ ，檢定力要高達 95% 時，試以雙尾檢定及右尾檢定之狀況下，應抽出多少樣本？

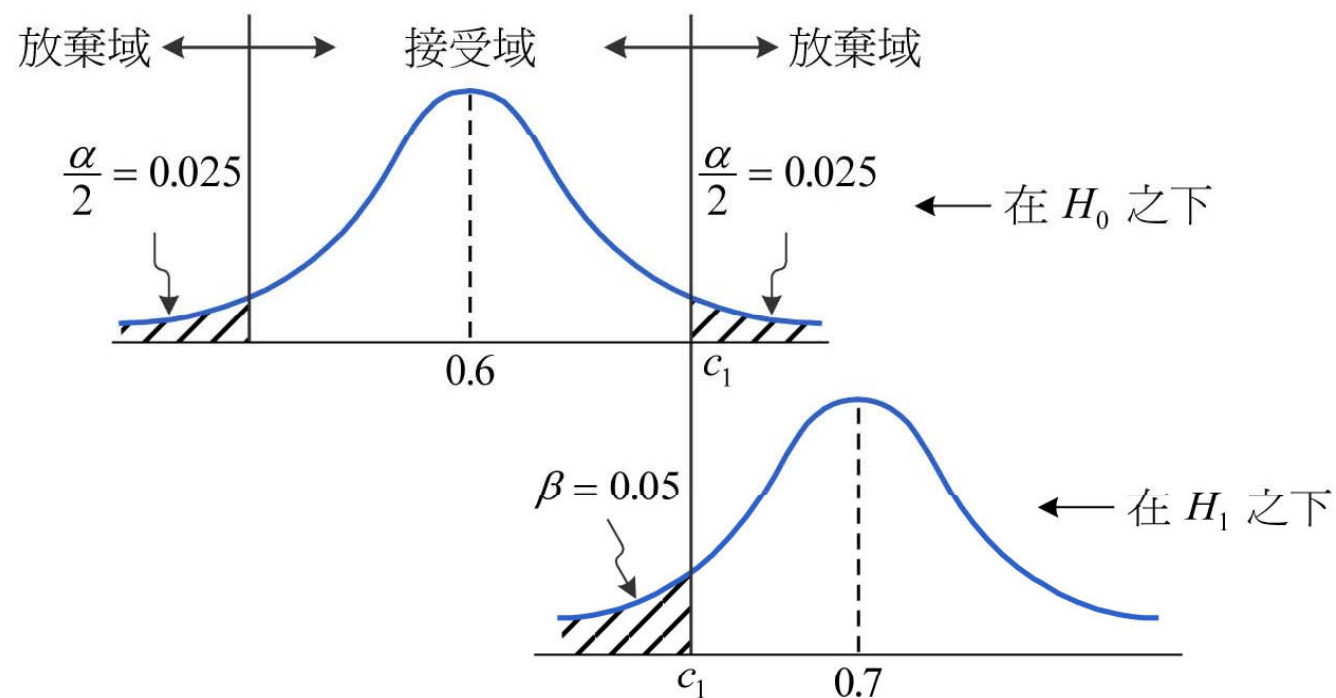


解： (a) 雙尾檢定：

① 假設： $H_0 : P = 0.6$ ， $H_1 : P \neq 0.6$

② 顯著水準：設為 $\alpha = 0.05$

③ 圖示： $1 - \beta = 0.95$ ， $\beta = 0.05$



④ 計算： $Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} = Z_{0.975} = 1.96$

$$Z_{0.05} = -1.645$$

$$P_0 = 0.6, P_1 = 0.7$$

(i) 在 H_0 之下： $C_1 = 0.6 + 1.96\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{n}}$

(ii) 在 H_1 之下： $C_1 = 0.7 - 1.645\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{n}}$

$$\therefore 0.6 + 1.96\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{n}} = 0.7 - 1.645\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{n}}$$

$$\therefore n = \left[\frac{1.96\sqrt{0.6(1-0.6)} + 1.645\sqrt{0.7(1-0.7)}}{0.7-0.6} \right]^2 = 294$$

⑤ 樣本大小： $n = 294$

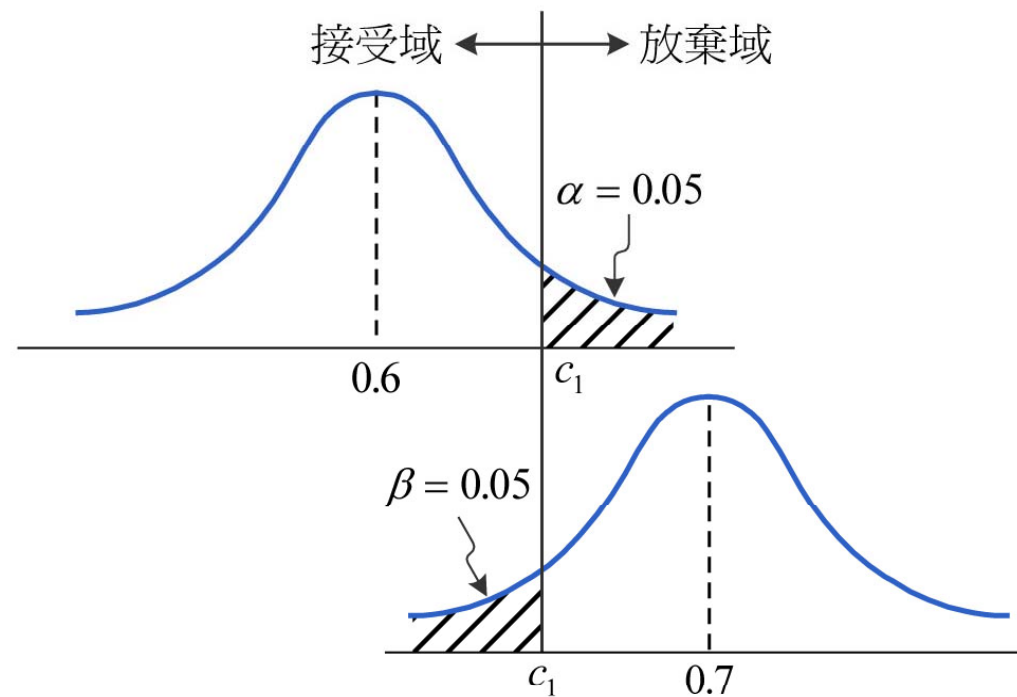


(b) 右尾檢定：

① 假設： $H_0 : P = 0.6$ ， $H_1 : P > 0.6$

② 顯著水準：設為 $\alpha = 0.05$

③ 圖示：



④ 計算： $Z_{(1-\alpha)} = Z_{0.95} = 1.645$

$$Z_{0.05} = -1.645$$

$$P_0 = 0.6, P_1 = 0.7$$

(i) 在 H_0 之下： $C_1 = 0.6 + 1.645\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{n}}$

(ii) 在 H_1 之下： $C_1 = 0.7 - 1.645\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{n}}$

$$\because 0.6 + 1.645\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{n}} = 0.7 - 1.645\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{n}}$$

$$\therefore n = \left[\frac{1.645\sqrt{0.6(1-0.6)} + 1.645\sqrt{0.7(1-0.7)}}{0.7 - 0.6} \right]^2 = 244$$

