

統計學

第七章 抽樣與抽樣分配

7-1 抽樣的基本概念

7-2 隨機抽樣的內容

7-3 抽樣分配的基本觀念

7-4 樣本平均數的抽樣分配

7-5 常態母體樣本平均數的抽樣分配

7-6 卡方分配

7-7 F 分配

7-8 t 分配

7-9 樣本比例抽樣分配

書號：512282

編著 江建良



普林斯頓國際有限公司

7-1 抽樣的基本概念

● 抽樣的意義與目的：

抽樣 (sampling)，係指由母體抽出樣本的程序或方法。其主要目的，便是如何在有限的經費下，取得代表性(代表**母體特性**)的樣本，以作為推論的依據。

● 抽樣方法：

✚ 隨機抽樣：

係指完全排除人為影響而按隨機原則進行的抽樣方式。

✚ 立意抽樣：

又稱為非隨機抽樣與上述之隨機抽樣相反，係指完全按人為方式所進行的抽樣。



7-1 抽樣的基本概念

● 抽樣誤差與非抽樣誤差：

✚ 抽樣誤差：

係指由抽樣所產生的誤差。因為隨機抽樣所抽出的隨機樣本，是隨機出現的，因此樣本出現不同，對母體推論的結果就不同。

✚ 非抽樣誤差：

係指抽樣誤差以外，在蒐集資料過程中所可能產生的誤差。



7-2 隨機抽樣的內容

● 基本抽樣法：

係指不含任何抽樣設計的抽樣方法，其功能在於如何取得隨機樣本。

✚ 簡單隨機抽樣法：

又稱為單純隨機抽樣法，係指母體中的一個個體皆有相同的機會被抽中，即每一個可能樣本出現的機會是均等的。

✚ 系統抽樣法：

又稱為非隨機抽樣與上述之隨機抽樣相反，係指完全按人為方式所進行的抽樣。



例題 7-1

自 1 號到 10 號十名學生中，隨機抽出 2 名學生，試依下列方式求算每組樣本被抽出的機會。

- (a) 每次抽出二名後放回，再同樣的繼續抽樣。
- (b) 每次抽出二名後，即不再放回，繼續就剩下之樣本抽樣。

解：(a) 即放回抽樣，可能樣本數共有 $N'' = 10^2 = 100$ 組，因此每組均有被抽中的機率為 $\frac{1}{100}$ 。

(共有 $\{(1,1), (1,2), (2,1), \dots, (9,1), (1,9), \dots, (10,10)\}$ 100 個)

(b) 即不放回抽樣，若考慮號碼出現的順序，則每組被抽中的機率均為 $\frac{1}{P''} = \frac{1}{10 \times 9} = \frac{1}{90}$ (少了 $(1,1), (2,2), \dots, (10,10)$ 共 10 個)；

若不考慮順序，則每組被抽中的機率為 $\frac{1}{C''} = \frac{1}{C_2^{10}} = \frac{1}{45}$ (少了上

述 10 個及重複 (如 $(1,2)(2,1)$ 算一個) 之 45 個)。



例題 7-2

試利用 (a) 籤條法；(b) 隨機數字法，自 100 位學生之母體中抽出 10 位學生，此 10 位學生即為一組隨機樣本。

解 (a) 籤條法：先將每位學生之學號（設 00~99）分別寫在 100 張 ($N = 100$) 同樣的卡片上，再將 100 張卡片放於箱內，充分攪和後，再自此箱中抽出 $n = 10$ 張卡片（可依放回或不放回方式），即為隨機樣本。

(b) 隨機數字法：先將學生由 00~99 依序編號，再利用附錄之隨機號碼表取得隨機樣本。例如自第 11、12 行第 6 列（研究者隨機自訂）起，向下（向左亦可）取出 10 個數字，即 67, 60, 84, 69, 22, 85, 25, 22（若以不放回方式，22 可跳過），13, 19 等 10 個數字之學生，即為一組 $n = 10$ 之隨機樣本。 ❖❖



例題 7-3

自 100 位學生中抽出 10 位同學，試利用系統抽樣法抽樣。

解：(a) 先將 100 位學生依順排列 00~99

(b) $\because$ 要抽出 10 名學生， $\therefore$ 將 100 名學生依號分成 10 組 (10 個間隔)，設第一個間隔 (00~99) 以籤條法或隨機號數法抽出一個樣本，設為 3 號，則自 3 號起，每隔 10 號抽出一個樣本，如此即可取得 10 個樣本，即 3, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93 等 10 位學生。 ❖



7-2 隨機抽樣的內容

- 抽樣設計：

- ✚ 抽樣設計的意義：

係指在實際抽樣之前，先對樣本的出處(即母體)，作適當的分類，然後再進行基本抽樣法，以期能抽出具有代表性的樣本，增強推論的可靠性。

7-2 隨機抽樣的內容

● 抽樣設計：

■ 抽樣設計的種類：

(1) 分層抽樣法：

係指先以某種分類標準，將母體分為若干類，每一類稱為一層(stratum)，然後在每一層中，按照比例，隨機抽取部分個體，組成樣本，稱為分層抽樣法。

(2) 集群抽樣法：

係指先以某種分類標準，將母體分為若干類，每一類稱為一個集群(cluster)，然後再以隨機抽樣的方式，從多個集群中，抽出部分集群調查，抽到的集群中的各個個體全部都查，未抽到的集群中之個體全部不查，此法稱之為集群抽樣法。



例題 7-4

某高中共二千名學生，高一 1,000 名，高二 600 名，高三 400 名，今欲抽出 500 名學生進行家庭經濟狀況調查，若要使 500 名學生的家庭經濟狀況，能反應全校學生的家庭經濟狀況，今如何進行抽樣，試說明之。

解：(a) 可利用分層比例配置的抽樣方法，即分層抽樣法。先將全校二千名學生，按年級為分類標準，再從各年級中隨機抽樣 $\frac{500}{2,000} = \frac{1}{4}$ 為樣本，共計 500 名。

(b) 所以各年級應抽出之學生人數如下：

$$\left. \begin{array}{l} \text{高一學生：} 1,000 \times \frac{1}{4} = 250 \text{ (名)} \\ \text{高二學生：} 600 \times \frac{1}{4} = 150 \text{ (名)} \\ \text{高三學生：} 400 \times \frac{1}{4} = 100 \text{ (名)} \end{array} \right\} \text{ (共計 500 名)}$$



例題 7-5

欲對台灣國小一年級學生之視力作調查，如何利用集群抽樣法進行調查，試說明之。並與分層抽樣法作比較。

解： (a) 先以“縣市”為分類標準，再隨機抽出若干個縣市之全部國小一年級學生調查即可。

(b) 使用集群抽樣法，一般而言，比分層抽樣法，在對母體推論上有較大的誤差，但為何仍被採用呢？主要是集群抽樣法可集中調查，比分層抽樣法節省人力、物力、時間。因此，在某些情況下，集群抽樣法反而比分層抽樣法較具優點。 ❖



7-2 隨機抽樣的內容

- 抽樣設計：

- ✦ 兩段抽樣法：

係指先使用集群抽樣法，抽出部分集群後，
在使用分層抽樣法對這些集群，
按一定比例抽出樣本，稱為兩段抽樣法。
因此兩段抽樣法，可說是上述兩種方法的應用。



例題 7-6

設下列表中之抽樣在比例上為 10%，集群抽樣只適用於二年級與五年級，試求表中之未知數人數。

年 級	全體人數	樣本人數		
		分層抽樣法	集群抽樣法	兩段抽樣法
一年級	1,000	A_1	—	
二年級	1,500	A_2	B_1	C_1
三年級	2,000	A_3	—	—
四年級	1,000	A_4	—	—
五年級	1,600	A_5	B_2	C_2
總 計	7,100	710	3,100	310

解： $A_1 = 1,000 \times 10\% = 100$ $B_1 = 1,500 \times 10\% = 150$ $C_1 = 1,500 \times 10\% = 150$

$A_2 = 1,500 \times 10\% = 150$ $B_2 = 1,600 \times 10\% = 160$ $C_2 = 1,600 \times 10\% = 160$

$A_3 = 2,000 \times 10\% = 200$

$A_4 = 1,000 \times 10\% = 100$

$A_5 = 1,600 \times 10\% = 160$



7-3 抽樣分配的基本觀念

● 統計量的意義：

係指一組隨機樣本的實數函數。

設 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 為抽自母體的一組隨機樣本，
定義 $Y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，此時 Y 是為統計量。

● 抽樣分配的意義：

抽樣分配 (sampling distribution)，係指由母體中抽出所有可能同次數的樣本，所作成之同一統計量的機率分配。

● 影響抽樣分配的因素：

- ✚ 母體分配不同，抽樣分配不同
- ✚ 樣本次數不同，抽樣分配不同
- ✚ 樣本統計量不同，抽樣分配不同



例題 7-7

設 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 為一組隨機樣本，試指出下列何者不是樣本統計量。

(a) $\sum_{i=1}^n X_i$ (b) $\frac{X_1 - \mu}{\sigma}$ (c) $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ (d) $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n}$

解： (a) (c) (d) 是樣本統計量，因其均為隨機樣本的實數函數，而 (b) 不是樣本統計量，因為 X_1 只是樣本中的任一觀察值，不能代表統計量的所有可能情況。



例題 7-8

設有一分配 $\{1, 2, 3\}$ 所組成，今隨機抽出 $n=2$ 為一組樣本，採放回抽樣，令統計量為 $\bar{X} = \frac{\sum X}{2}$ ，試求 $\bar{X}$ 之抽樣分配及其表徵數。

解： (a) 母體分配：由 $\{1, 2, 3\}$ 所組成，其機率分配如下：

X	$f(x)$
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$

$$\mu = 1\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) = 2$$

$$V(X) = (1-2)^2\left(\frac{1}{3}\right) + (2-2)^2\left(\frac{1}{3}\right) + (3-2)^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$



(b) 抽樣：隨機抽取 $n=2$ 為一組樣本，採放回抽樣，共有 $N^n = 3^2 = 9$ 組可能樣本，如下表所示。每一組樣本發生的機率均為 $\frac{1}{9}$ 。

樣 本	統計量 (樣本平均數)	發生機率
(1,1)	1	$\frac{1}{9}$
(1,2)	1.5	$\frac{1}{9}$
(1,3)	2	$\frac{1}{9}$
(2,1)	1.5	$\frac{1}{9}$
(2,2)	2	$\frac{1}{9}$
(2,3)	2.5	$\frac{1}{9}$
(3,1)	2	$\frac{1}{9}$
(3,2)	2.5	$\frac{1}{9}$
(3,3)	3	$\frac{1}{9}$



(c) 樣本統計量： $\bar{X} = \frac{\sum X}{2}$ ，即以 $n=2$ 之樣本平均數均為樣本統計量。

(d) 抽樣分配：將上表樣本平均數及其發生之機率加以整理，即得樣本平均數的抽樣分配。

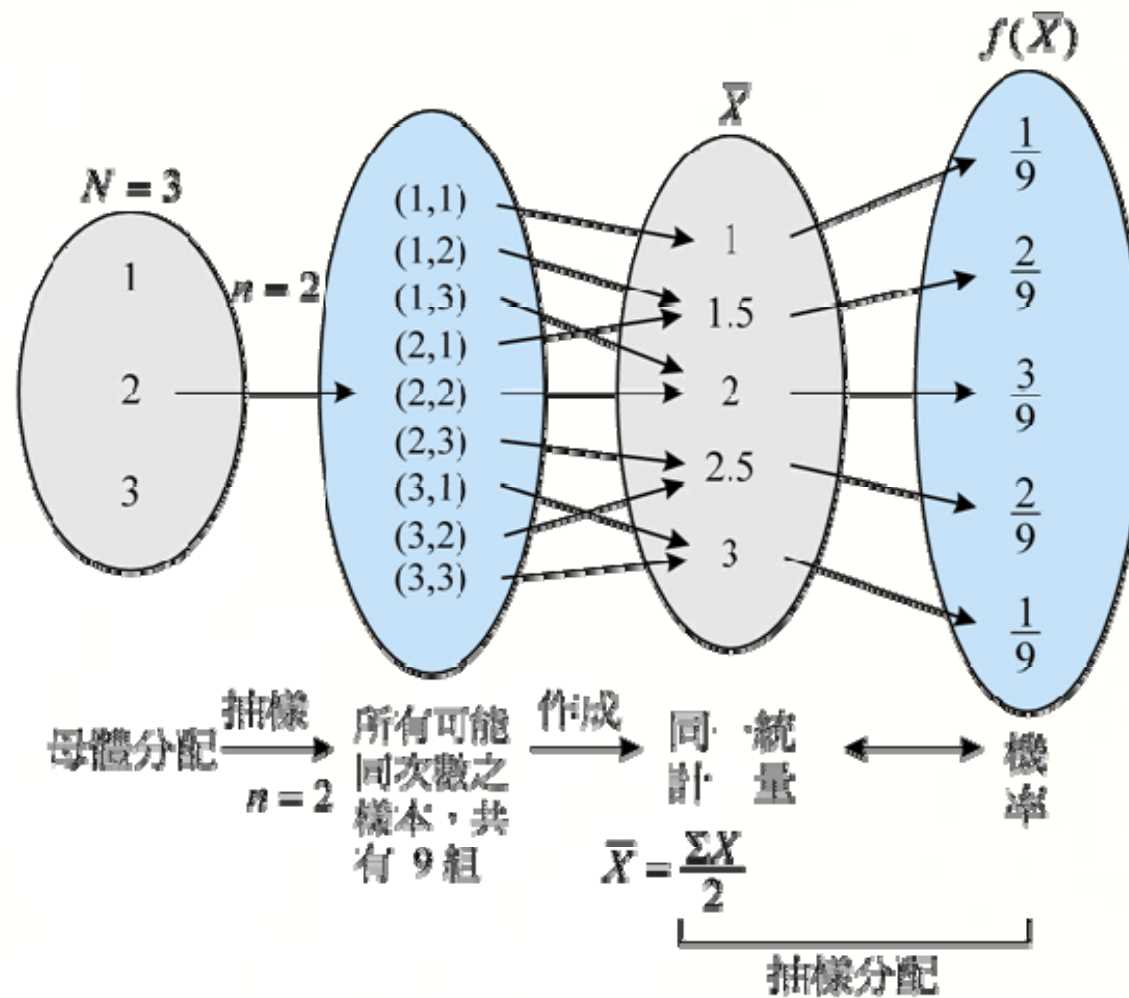
樣本平均數 ($\bar{X}$)	$f(\bar{X})$
1	$\frac{1}{9}$
1.5	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{3}{9}$
2.5	$\frac{2}{9}$
3	$\frac{1}{9}$

$$E(\bar{X}) = 1\left(\frac{1}{9}\right) + 1.5\left(\frac{2}{9}\right) + 2\left(\frac{3}{9}\right) + 2.5\left(\frac{2}{9}\right) + 3\left(\frac{1}{9}\right) = 2$$

$$V(\bar{X}) = (1-2)^2\left(\frac{1}{9}\right) + (1.5-2)^2\left(\frac{2}{9}\right) + (2-2)^2\left(\frac{3}{9}\right) + (2.5-2)^2\left(\frac{2}{9}\right) + (3-2)^2\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}$$



茲將上例以下圖表示：



由上圖可知，抽樣分配是屬機率分配。



7-4 樣本平均數的抽樣分配

● 常見的抽樣分配：

- ✚ 樣本平均數的抽樣分配
- ✚ 常態母體樣本平均數的抽樣分配
- ✚ 卡方分配 (χ^2 分配)
- ✚ F 分配
- ✚ t 分配
- ✚ 樣本比例抽樣分配

7-4 樣本平均數的抽樣分配

● 樣本平均數抽樣分配：

✚ 抽樣分配

(1) 若採放回抽樣 (即視母體為無限母體)：

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \sigma_{\bar{X}} = \sqrt{V(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(2) 若採不放回抽樣 (即視母體為有限母體)：

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = \frac{N-n}{N-1} \times \frac{\sigma^2}{n}$$
$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{V(\bar{X})} = \sqrt{\frac{N-n}{N-1} \times \frac{\sigma^2}{n}}$$



例題 7-9

自母體中隨機抽取 n 個獨立樣本，令為 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，試證明

$$E(\bar{X}) = \mu, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (\text{採放回抽樣，其中 } E(X_i) = \mu, V(X_i) = \sigma^2)。$$

解： (a) $E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right) = \frac{1}{n} E(\sum X_i)$

$$= \frac{1}{n} \sum [E(X_i)] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu \quad (\because E(X_i) = \mu)$$

(b) $V(\bar{X}) = V\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(\sum X_i)$

$$= \frac{1}{n^2} \sum [V(X_i)] = \frac{1}{n^2} \sum \sigma^2$$
$$= \frac{1}{n^2} n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad (\because X_i \text{ 互為獨立})$$

[註：有限母體因 X_i 之間並非獨立，證明複雜，從略]



例題 7-10

試就例題 7-8 說明 $E(\bar{X}) = \mu$, $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ 。

解： (a) $\because$ 樣本平均數的抽樣分配之 $E(\bar{X}) = 2 =$ 母體分配平均數 $\mu = 2$

$$\therefore E(\bar{X}) = \mu$$

$$(b) \because \text{樣本平均數的抽樣分配之 } V(\bar{X}) = \frac{1}{3} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\therefore V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$



例題 7-11

試就例題 7-8 以隨機不放回抽樣進行，試求

- (a) $\bar{X}$ 分配
- (b) $\bar{X}$ 分配之期望值與變異數
- (c) 證明： $E(\bar{X}) = \mu$ ， $V(\bar{X}) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$ 。

解：(a) 不放回抽樣，可能樣本（設考慮順序）為 $P_2^3 = 3 \times 2 = 6$ 種可能情況（即少了 (1,1)、(2,2)、(3,3) 三種情況），每種情況出現均為 $\frac{1}{6}$ ，即 {(1,2)、(1,3)、(2,1)、(2,3)、(3,1)、(3,2)}， $\bar{X}$ 抽樣分配。

$\bar{X}$	1.5	2.0	2.5
$f(\bar{X})$	2/6	2/6	2/6



(b)、(c)

$$\textcircled{1} \quad E(\bar{X}) = 1.5\left(\frac{2}{6}\right) + 2.0\left(\frac{2}{6}\right) + 2.5\left(\frac{2}{6}\right) = 2.0$$

$$\mu = \frac{1+2+3}{3} = 2$$

$$\therefore E(\bar{X}) = \mu$$

$$\textcircled{2} \quad V(\bar{X}) = (1.5 - 2.0)^2\left(\frac{2}{6}\right) + (2.0 - 2.0)^2\left(\frac{2}{6}\right) + (2.5 - 2.0)^2\left(\frac{2}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\frac{3-2}{3-1} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{6} = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\therefore V(\bar{X}) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$

(註：若不考慮順序，答案一樣，請自行計算之。)



例題 7-12

設一有限母體 $\{1, 2, 3, 4\}$ ，以不放回抽樣方式抽取 $n=2$ 為一組樣本，試求 $\bar{X}$ 分配並求 $E(\bar{X})$ 與 $V(\bar{X})$ ，並證明 $E(\bar{X}) = \mu, V(\bar{X}) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$ 。

解：(a) 可能出現之樣本（設考慮順序）為 $P_2^4 = 4 \times 3 = 12$ 種可能情況，每種情況出現機率均為 $\frac{1}{12}$ 。即 $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$ 。
 $\bar{X}$ 分配

$\bar{X}$	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
$f(\bar{X})$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$



$$(b) \textcircled{1} E(\bar{X}) = 1.5\left(\frac{2}{12}\right) + 2.0\left(\frac{2}{12}\right) + 2.5\left(\frac{4}{12}\right) + 3.0\left(\frac{2}{12}\right) + 3.5\left(\frac{2}{12}\right) = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\mu = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\therefore E(\bar{X}) = \mu$$

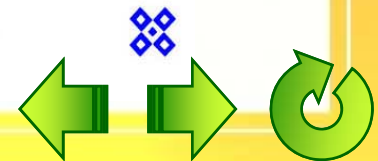
$$\begin{aligned} \textcircled{2} V(\bar{X}) &= (1.5 - 2.5)^2 \left(\frac{2}{12}\right) + (2.0 - 2.5)^2 \left(\frac{2}{12}\right) + (2.5 - 2.5)^2 \left(\frac{4}{12}\right) \\ &\quad + (3.0 - 2.5)^2 \left(\frac{2}{12}\right) + (3.5 - 2.5)^2 \left(\frac{2}{12}\right) = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

$$V(X) = [(1 - 2.5)^2 + (2 - 2.5)^2 + (3 - 2.5)^2 + (4 - 2.5)^2] / 4 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{4-2}{4-1} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore V(\bar{X}) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$

(註：若不考慮順序，答案一樣，請自行計算之。)



7-4 樣本平均數的抽樣分配

- 樣本平均數抽樣分配的共通性質：

- ✚ $\bar{X}$ 分配的期望值： $E(\bar{X}) = \mu$

- ✚ $\bar{X}$ 分配的變異數：

- (1) 當採放回抽樣(視母體為無限母體)：

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- (2) 當採不放回抽樣(視母體為有限母體)：

$$V(\bar{X}) = \frac{N-n}{N-1} \times \frac{\sigma^2}{n}$$



例題 7-13

設甲產品的重量標準差為 10 公克，今抽樣 100 件（採放回抽樣），試求：

- (a) 若 $n=100$ 時之標準誤
- (b) 若 $n=400$ 時之標準誤（樣本增大）
- (c) 若 $n=25$ 時之標準誤（樣本減小）
- (d) (b)、(c) 情況推論可靠性有何關係？



解： (a) $n = 100, \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{100}} = 1$

(b) $n = 400, \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{400}} = \frac{1}{2}$

(c) $n = 25, \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$

(d) 由 (b) 得知，當樣本次數由 100 增大為 400 時， $\sigma_{\bar{X}}$ 由 1 減少為 1/2，標準誤減少，分散度減少，推論可靠性增加；由 (c) 得知，樣本次數由 100 減少為 25， $\sigma_{\bar{X}}$ 由 1 增加為 2，標準誤增加，分散度增加，推論可靠性減少。



7-4 樣本平均數的抽樣分配

● 樣本平均數抽樣分配的共通性質：

✚ 大數法則：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(-\varepsilon < \bar{X}_n - \mu < +\varepsilon) \rightarrow 1$$

✚ 中央極限定理：

係指不限母體分配型態為何，當 $n \rightarrow \infty$ (在實務上， $n \geq 30$ 即可適用) 時， $\bar{X}$ 分配以常態分配為其極限。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}) = n \left(\bar{x} ; \mu, \frac{\sigma^2}{n} \right)$$



例題 7-14

試以樣本平均數抽樣分配的表徵數，說明大數法則的意義。

解：由 $\bar{X}$ 抽樣分配之變異數可知，當 $n \rightarrow \infty$ 時， $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0$ ，即 $\bar{X}$ 分配之分散度趨近於 0，換言之， $\bar{X}$ 會無限趨近於 μ ，推論可靠度最高，此即大數法則的意義。 ❖



例題 7-15

設從分配 $f(x) = \frac{1}{3}, x=1, 2, 3$ 中，以放回抽樣抽取 $n=100$ 的隨機樣本，試求 $\bar{X}$ 抽樣分配之平均數介於 1.5 到 2.5 之間的機率為何？

解： $E(X)=2, V(X)=\frac{2}{3}$ (詳見例題 7-8 計算)

$$E(\bar{X}) = \mu = 2, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{100} = \frac{1}{150}$$

$\because n=100$ 夠大， $\therefore \bar{X}$ 分配近於常態分配

$$\begin{aligned} P(1.5 \leq \bar{X} \leq 2.5) &= P\left(\frac{1.5-2}{\sqrt{\frac{1}{150}}} \leq Z \leq \frac{2.5-2}{\sqrt{\frac{1}{150}}} \right) = P(-6.124 \leq Z \leq 6.124) \\ &= P(Z \leq 6.124) - P(Z \leq -6.124) = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$



例題 7-16

設有一分配 $\mu=30$, $\sigma=5$, 今自該分配抽出 $n=64$ 為一隨機樣本，試求：

- (a) $n=64$, $\bar{X}$ 分配之表徵數
- (b) $P(\bar{X} < 28.5)$
- (c) $P(\bar{X} > 31)$
- (d) $P(29 < \bar{X} < 31.5)$



解： $\because n = 64 > 30$, $\therefore$ 依中央極限定理， $\bar{X}$ 分配趨近常態分配

(a) ① 期望值： $E(\bar{X}) = \mu = 30$

② 變異數： $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{3^2}{64} = 0.1406$

(b) $P(\bar{X} < 28.5) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{28.5 - 30}{5/\sqrt{64}}\right)$
 $= P(Z < -2.4) = 0.0082$

(c) $P(\bar{X} > 31) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{31 - 30}{5/\sqrt{64}}\right)$
 $= P(Z > 1.60) = 1 - P(Z < 1.60) = 1 - 0.9452 = 0.0548$

(d) $P(29 < \bar{X} < 31.5) = P\left(\frac{29 - 30}{5/\sqrt{64}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{31.5 - 30}{5/\sqrt{64}}\right)$
 $= P(-1.60 < Z < 2.40) = P(Z < 2.40) - P(Z < -1.60)$
 $= 0.9918 - 0.0548 = 0.9370$



7-5 常態母體樣本平均數的抽樣分配

- 常態母體樣本平均數的抽樣分配：

$$f(\bar{x}) = n \left(\bar{x} ; \mu , \frac{\sigma^2}{n} \right)$$

- 常態母體兩樣本平均數差的抽樣分配：

$$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = E(\bar{X}_1) - E(\bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = V(\bar{X}_1) + V(\bar{X}_2)$$

$$= \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$



例題 7-17

設甲高中學生身高呈常態分配， $\mu=160, \sigma=5$ （公分），試求：

- (a) 隨機抽出 100 人，其平均身高 $\bar{X}$ 的抽樣分配
- (b) $P(\bar{X} < 161)$ 、 $P(159.5 < \bar{X} < 160.5)$ 及 $P(\bar{X} > 161)$ 。



解： (a) $\bar{X}$ 為服從於 $n\left(\bar{X}; 160, \frac{25}{100}\right)$ 的常態分配，即 $\bar{X} \sim n\left(\bar{X}; 160, \frac{25}{100}\right)$

$$(b) \textcircled{1} \quad P(\bar{X} < 161) = P\left(Z < \frac{161 - 160}{\sqrt{\frac{25}{100}}}\right) = P(Z < 2) = 0.9772$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad P(159.5 < \bar{X} < 160.5) &= P\left(\frac{159.5 - 160}{\sqrt{\frac{25}{100}}} < Z < \frac{160.5 - 160}{\sqrt{\frac{25}{100}}}\right) \\ &= P(-1 < Z < 1) \\ &= P(Z < 1) - P(Z < -1) \\ &= 0.8413 - 0.1587 = 0.6826 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad P(\bar{X} > 161) &= P\left(Z > \frac{161 - 160}{\sqrt{\frac{25}{100}}}\right) = 1 - P(Z < 2) \\ &= 1 - 0.9772 = 0.0228 \end{aligned}$$



例題 7-18

設 X 分配為 $n(30, 25)$ ， Y 分配為 $n(28, 16)$ ，今令 $\bar{X}$ 與 $\bar{Y}$ 分別為樣本次數 $n=25$ 的樣本平均數，試求 $P(\bar{X} > \bar{Y})$, $P(\bar{X} - \bar{Y} < 3)$ 。

解： $\because X \sim n(30, 25)$ ， $n=25$ ， $\bar{X} \sim n\left(30, \frac{25}{25}\right)$

$$Y \sim n(28, 16)，n=25，\bar{Y} \sim n\left(28, \frac{16}{25}\right)$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim n\left(30 - 28, \frac{25}{25} + \frac{16}{25}\right) = n\left(2, \frac{41}{25}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad P(\bar{X} > \bar{Y}) &= P(\bar{X} - \bar{Y} > 0) = P\left(Z > \frac{0-2}{\sqrt{\frac{41}{25}}}\right) = P(Z > -1.56) \\ &= 1 - P(Z < -1.56) = 1 - 0.0594 = 0.9406 \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad P(\bar{X} - \bar{Y} < 3) = P\left(Z < \frac{3-2}{\sqrt{\frac{41}{25}}}\right) = P(Z < 0.78) = 0.7823$$



7-6 卡方分配

- 樣本變異數的抽樣分配：

- ✚ 統計量： $\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

- ✚ 表徵數： $E(\hat{S}^2) = \sigma^2$
 $V(\hat{S}^2) = \frac{2}{n-1} \sigma^4$

- 卡方分配：

- ✚ 卡方分配的導出： $\chi^2_{(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}$

- ✚ 自由度的意義：

係指組成一個卡方統計量中可以自由變動的個數。

卡方統計量中每含一個條件式，即失去一個自由度。



例題 7-19

設有三數之和必須為 10，求其自由度。

解： $\because$ 有三數，其 $n=3$ ，其條件式必須等於 10，所以只有其中兩數可自由變動（即獨立），當其中兩數已決定，第三數就必固定，因此第三數是不自由的。例如其中兩數為 1, 5，則第三數必為 4，否則無法滿足條件式三數和為 10 的要求。當然，若其中兩數為 2, 7，則第三數必為 1。因此只有二數是自由，第三數必不自由，所以自由度為 $n-1=3-1=2$ 。



7-6 卡方分配

● 卡方分配：

✚ 卡方分配的性質：

(1) 期望值 $E(\chi^2) = f$

變異數 $V(\chi^2) = 2f$

(2) 設有兩個獨立的卡方統計量 $\chi^2_{(f1)}$, $\chi^2_{(f2)}$

則 $\chi^2_{(f1)} + \chi^2_{(f2)} = \chi^2_{(f1+f2)}$

上列之性質，稱為卡方之加法性 (或稱加法定理)

(3) χ^2 曲線並非對稱，而是右偏的曲線。

(4) 卡方分配的用途甚多，如常態母體變異數 σ^2 的推論，無母數統計方法中諸多推論的應用，因此甚為重要。



例題 7-20

試求下列各卡方值 (查表) :

(a) $\chi^2_{0.05(10)}$

(b) $\chi^2_{0.95(10)}$

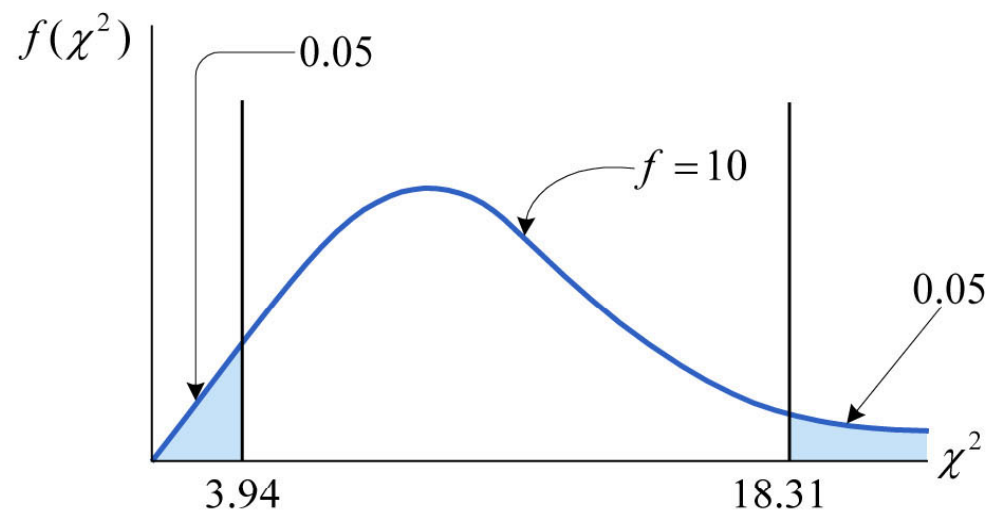
(c) $P(\chi^2 < a) = 0.95, f = 15$

(d) $P(\chi^2 > b) = 0.025, f = 20$



解： (a) $\chi^2_{0.05(10)} = 3.94$

(b) $\chi^2_{0.95(10)} = 18.31$



(c) $P(\chi^2 < a) = 0.95, f = 15, \therefore a = 25.00$

(d) $P(\chi^2 > b) = 0.025 \rightarrow P(\chi^2 < b) = 1 - 0.25 = 0.975$

在 $f = 20$ 下, $b = 34.17$



例題 7-21

設由常態分配 $n(4, 16)$ 抽出 $n=51$ 的隨機樣本，試求：

- (a) 樣本變異數 $\hat{S}^2$ 會超過 21.6 之機率 $\left[\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X - \bar{X})^2 \right]$ 。
- (b) $\hat{S}^2$ 小於 9.5072 之機率。
- (c) $\hat{S}^2$ 介於 8.9568 與 25.4368 之間之機率。

解： 本題可利用 χ^2 分配 $\chi^2_{(n-1)} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}$ 求解

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad P(\hat{S}^2 > 21.6) &= P\left[\chi^2 > \frac{(51-1)21.6}{16}\right] = P(\chi^2 > 67.5) \\ &= 1 - P(\chi^2 < 67.5) = 1 - 0.95 = 0.05 \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad P(\hat{S}^2 < 9.5072) = P\left[\chi^2 < \frac{(51-1)9.5072}{16}\right] = P(\chi^2 < 29.71) = 0.010$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad P(8.9568 < \hat{S}^2 < 25.4368) &= P\left[\frac{(51-1)8.9568}{16} < \chi^2 < \frac{(51-1)25.4368}{16}\right] \\ &= P(27.99 < \chi^2 < 79.49) = 0.995 - 0.005 \\ &= 0.990 \end{aligned}$$



例題 7-22

設樣本變異數 $\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X - \bar{X})^2$ 由常態分配 $n(\mu, \sigma^2)$ 採放回方式隨機抽樣作成，試求：

(a) $E\left[\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}\right]$ 與 $V\left[\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}\right]$ (b) $E(\hat{S}^2)$ 與 $V(\hat{S}^2)$



解： (a) ① $\because$ 其母體為常態母體，由 χ^2 統計量可知

$$\chi_{(n-1)}^2 = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}$$

$$\therefore E[\chi_{(n-1)}^2] = E\left[\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}\right] = n-1$$

($\because \chi^2$ 分配的期望值等於其自由度)

$$\textcircled{2} \quad V\left[\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}\right] = V[\chi_{(n-1)}^2] = 2(n-1)$$

($\because \chi^2$ 分配的變異數等於其 2 倍自由度)

$$(b) \textcircled{1} \quad E(\hat{S}^2) = \frac{\sigma^2}{n-1} E\left[\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}\right] = \frac{\sigma^2}{n-1} (n-1) = \sigma^2$$

$$\textcircled{2} \quad V(\hat{S}^2) = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} V\left[\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}\right] = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} [2(n-1)] = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$



例題 7-23

設 $n=20$ ，母體分配為常態分配，令 $P\left(\frac{\hat{S}^2}{\sigma^2} < K_1\right) = 0.05$ 且 $P\left(\frac{\hat{S}^2}{\sigma^2} > K_2\right) = 0.05$ ，試求 K_1 與 K_2 之值。

解： (a) $P\left(\frac{\hat{S}^2}{\sigma^2} < K_1\right) = P\left(\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} < (n-1)K_1\right) = P[\chi^2 < (20-1)K_1] = 0.05$

查表可知 $19K_1 = 10.12, \therefore K_1 = 0.5326$ ($\because n=20, \therefore f = n-1=19$)

(b) $P\left(\frac{\hat{S}^2}{\sigma^2} > K_2\right) = P\left(\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} > (n-1)K_2\right)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P[\chi^2 > 19K_2] &= 1 - P(\chi^2 < 19K_2) \\ &= 1 - 0.95 = 0.05 \end{aligned}$$

查表可知 $19K_2 = 30.14, \therefore K_2 = 1.586$ ($f = 19$)



7-7 F 分配

● F 分配的導出：
$$F = \frac{\frac{\chi_1^2}{f_1}}{\frac{\chi_2^2}{f_2}} = F(f_1, f_2)$$

● F 分配的性質：

1. 期望值 $E(F) = \frac{f_2}{f_2 - 2}, f_2 > 2$

2. 變異數 $V(F) = \frac{2f_2^2(f_1 + f_2 - 2)}{f_1(f_2 - 2)^2(f_2 - 4)}, f_2 > 4$

3. $F(\alpha; f_1, f_2) = \frac{1}{F(1 - \alpha; f_2, f_1)}$



例題 7-24

試利用 F 分配機率表，求算下列 F 值：

(a) $F(0.95; 5, 10)$

(b) $F(0.05; 5, 10)$

(c) $F(0.975; \infty, \infty)$

(d) $F(1-\alpha; 3, 5) = 7.7636$ 之 α 值

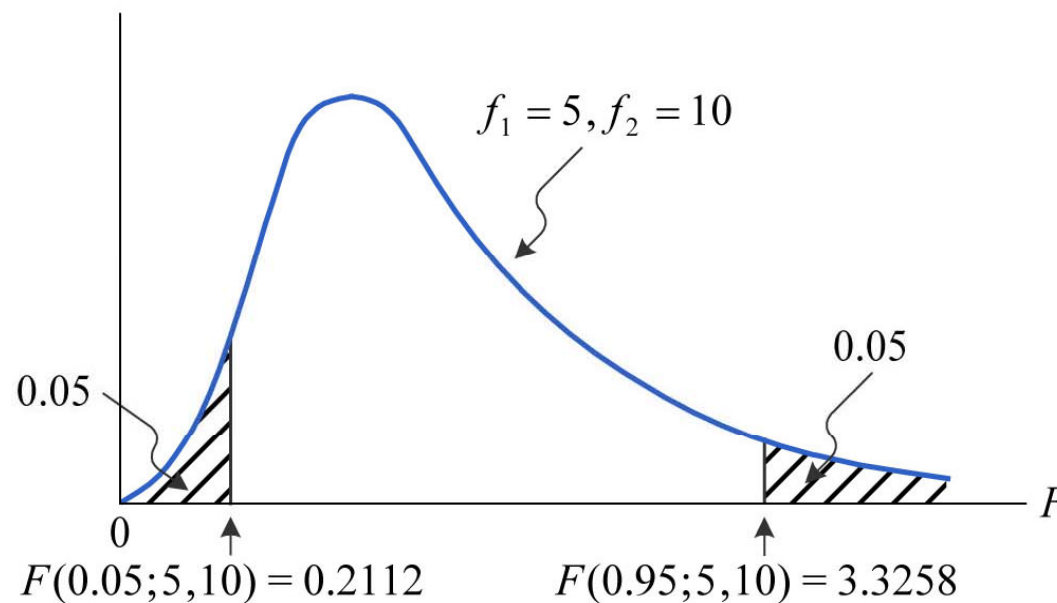


解： (a) $F(0.95; 5, 10) = 3.3258$

$$(b) F(0.05; 5, 10) = \frac{1}{F(0.95; 10, 5)} = \frac{1}{4.7351} = 0.2112 \quad (\text{見下圖})$$

$$(c) F(0.975; \infty, \infty) = 1$$

$$(d) F(1 - \alpha; 3, 5) = 7.7636, \quad 1 - \alpha = 0.975, \quad \therefore \alpha = 0.025$$



例題 7-25

設 $\hat{S}_1^2, \hat{S}_2^2$ 分別由常態母體 $n(5, 15), n(8, 25)$ 隨機抽出之兩組獨立樣本的變異數，其樣本次數分別為 $n_1 = 16, n_2 = 11$ ，試求：

- (a) $\hat{S}_1^2 / \hat{S}_2^2$ 會超過 1.7070 之機率。
- (b) $\hat{S}_1^2 / \hat{S}_2^2$ 介於 1.7070 與 2.1130 之間之機率。
- (c) $\hat{S}_1^2 / \hat{S}_2^2 \geq 0$ 之機率。



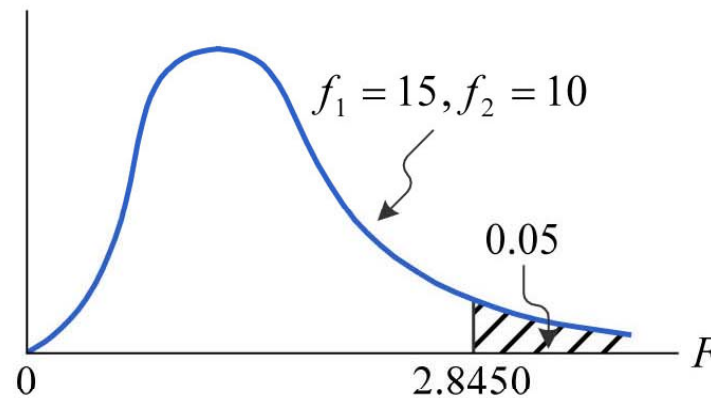
解： (a)
$$P\left(\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} > 1.7070\right) = P\left[\frac{\frac{\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2}} > \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}(1.7070)\right] = P\left[F > \frac{25}{15}(1.7070)\right]$$

$$= P(F > 2.8450)$$

$$= 1 - P(F < 2.8450) (f_1 = n_1 - 1 = 15, f_2 = n_2 - 1 = 10)$$

$$= 1 - 0.95$$

$$= 0.05$$



$$(b) P\left(1.7070 < \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} < 2.1130\right)$$

$$= P\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}(1.7070) < \frac{\frac{\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2}} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}(2.1130)\right)$$

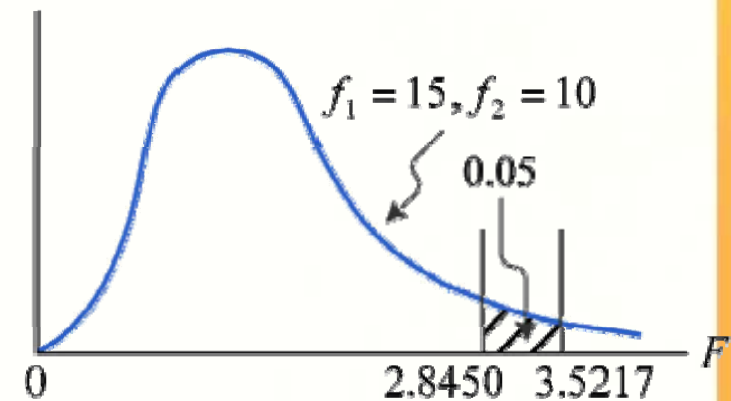
$$= P\left[\frac{25}{15}(1.7070) < F < \frac{25}{15}(2.1130)\right]$$

$$= P(2.8450 < F < 3.5217)$$

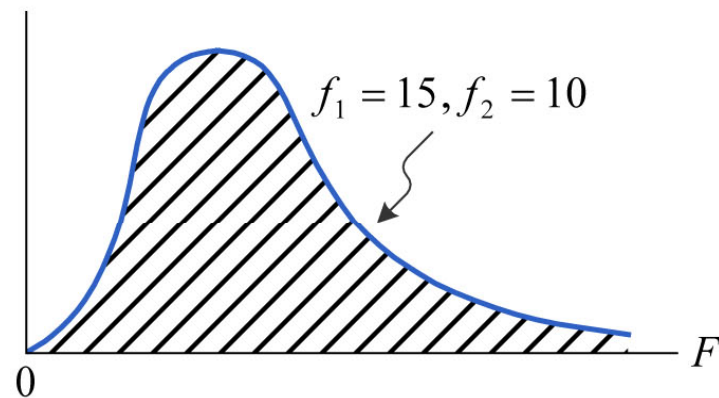
$$= P(F < 3.5217) - P(F < 2.8450) \quad (f_1 = 15, f_2 = 10)$$

$$= 0.975 - 0.95$$

$$= 0.025$$



$$(c) \quad P\left(\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \geq 0\right) = P\left(\frac{\frac{\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2}} \geq 0\right) = F(F \geq 0) = 1$$



7-8 t 分配

● t 分配的導出：
$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2}{f}}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\frac{\sigma^2}{n-1}}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}}$$

● t 分配的性質：

1. 期望值 $E(t) = 0$

2. 變異數 $V(t) = \frac{f}{f-2}$, $f > 2$

3. $F(1, f) = t^2(f)$



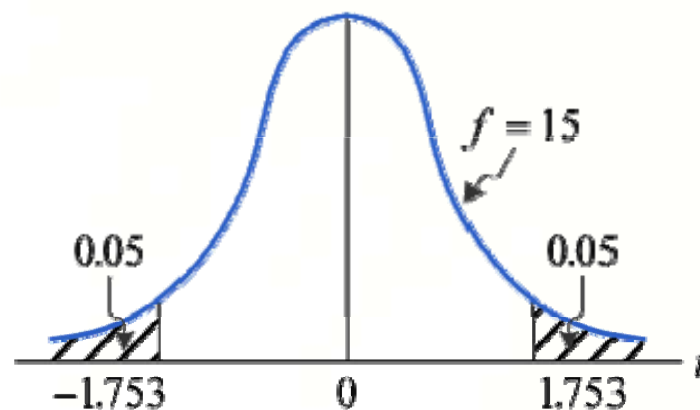
例題 7-26

試求下列各值 (t 表示 t 分配) (查表) :

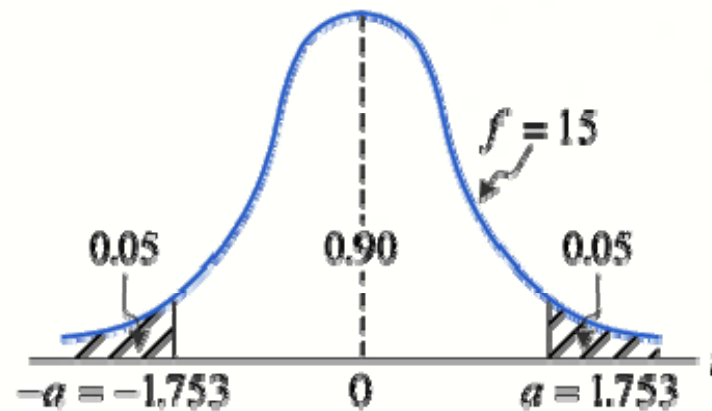
- (a) $t_{0.95(15)}$ (b) $t_{0.05(15)}$ (c) $P(-a < t < a) = 0.90, f = 15$ 之 a 值
(d) 當 $f = 300$, 求 $P(t < b) = 0.6700$ 之 b 值與 $P(t < c) = 0.3300$ 之 c 值

解 : (a) $t_{0.95(15)} = 1.753$

(b) $t_{0.05(15)} = -t_{0.95(15)} = -1.753$

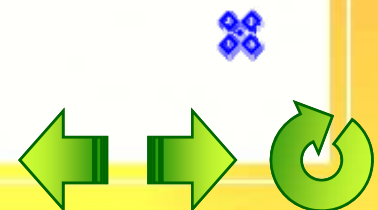
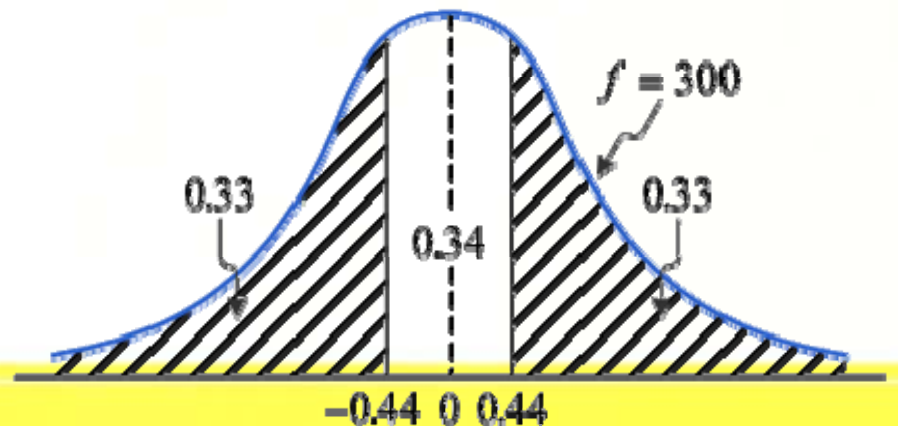


(c) $\because t$ 分配為對稱分配，如下圖所示



$\therefore a = 1.753$ (查 $1 - \alpha = 0.95$, $f = 15$) 。

(d) $\because f = 300$ 很大，趨近於 Z 分配， $\therefore$ 改查 Z 分配機率表 $b = 0.44$,
 $c = -0.44$ 。



例題 7-27

已知罐裝烏龍茶飲料呈常態分配， $\mu=15$ 元，但標準差未知，今自該分配抽出 $n=16$ 為一隨機樣本，樣本標準差 2 元，試求：

(a) $P(\bar{X} < 14.1235)$

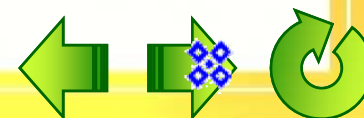
(b) $P(\bar{X} > 16.301)$

(c) $P(14.1235 < \bar{X} < 16.301)$

解： (a) $P(\bar{X} < 14.1235) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} < \frac{14.1235 - 15}{2/\sqrt{16}}\right) = P(t < -1.7530) = 0.05$

(b) $P(\bar{X} > 16.301) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} > \frac{16.301 - 15}{2/\sqrt{16}}\right) = P(t > 2.602)$
 $= 1 - P(t < 2.602) = 1 - 0.99 = 0.01$

(c) $P(14.1235 < \bar{X} < 16.301) = P\left(\frac{14.1235 - 15}{2/\sqrt{16}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} < \frac{16.301 - 15}{2/\sqrt{16}}\right)$
 $= P(-1.7530 < t < 2.602)$
 $= P(t < 2.602) - P(t < -1.7530)$
 $= 0.99 - 0.05 = 0.94$



例題 7-28

設 $X \sim n(60, \sigma)$ ，茲自該分配中抽出 $n=9$ 之樣本次數，求算出其標準差 $\hat{S}=6$ ， $n=9$ 之抽樣分配的平均數在某一數值 K 以上的機率為 0.05，試求 K 值。



解： (a) $\because n=9$ 之樣本次數抽自常態母體，且 $n=9$ 為小樣本 ($n < 30$)，常態母體之標準差亦未知，故可利用 t 分配解決。

$$(b) \frac{\bar{X} - 60}{\frac{6}{\sqrt{9}}} \sim t_{(n-1)} = t_{(8)}$$

$$\Rightarrow P(\bar{X} > K) = 0.05 \Rightarrow P\left(\frac{\bar{X} - 60}{\frac{6}{\sqrt{9}}} > \frac{K - 60}{\frac{6}{\sqrt{9}}}\right) = 0.05$$

$$\Rightarrow P\left(t > \frac{K - 60}{\frac{6}{\sqrt{9}}}\right) = 1 - P\left(t < \frac{K - 60}{\frac{6}{\sqrt{9}}}\right) = 0.05$$

$$\Rightarrow \frac{K - 60}{2} = t_{0.95(8)} = 1.860$$

$$\Rightarrow K = 63.72$$



7-9 樣本比例抽樣分配

- 導出過程： $f(\hat{P}) = C_{n\hat{P}}^n P^{n\hat{P}} q^{n(1-\hat{P})}$ ， $\hat{P} = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$
 $0 < P < 1, q = 1 - P$

- 表徵數：

(1) 放回抽樣 (無限母體)，類似二項分配

$$E(\hat{P}) = P, V(\hat{P}) = \frac{P(1-P)}{n} = \frac{Pq}{n}$$

(2) 不放回抽樣 (有限母體)，類似超幾何分配，其式如下：

$$f(\hat{P}) = \frac{C_{n\hat{P}}^K C_{n-n\hat{P}}^{N-K}}{C_n^N}$$

$$E(\hat{P}) = P, V(\hat{P}) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{P(1-P)}{n} = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{Pq}{n}$$



7-9 樣本比例抽樣分配

- 大樣本下之 $\hat{P}$ 分配：

$$Z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}, \quad \hat{P} \sim n\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\right)$$

- 兩樣本比例差的抽樣分配：

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}}$$

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \sim n\left(P_1 - P_2, \frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}\right)$$



例題 7-29

設一母體有 5 件產品，其中 3 件為良品，2 件為不良品，今自其中抽出 $n=2$ 件產品，試求：

- (a) 設採放回抽樣：求 $\hat{P} = \frac{X}{n}$ 之分配，及其表徵數 $E(\hat{P}), V(\hat{P})$ ，並說明其與樣本次數 n 及不良品比例 P 之關係。
- (b) 若上述情況，採不放回抽樣，求上述之結果。



解： (a) 放回抽樣 (無限母體)：

$\hat{P}$ 分配類似二項分配 $f(\hat{P}) = C_{n\hat{P}}^n P^{n\hat{P}} q^{n-n\hat{P}}$

$\hat{P}$	0	1/2	1
$f(\hat{P})$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$\left(\because \hat{P} = \frac{X}{n} \right)$$

$$E(\hat{P}) = \sum \hat{P} f(\hat{P}) = 0 \left(\frac{9}{25} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{12}{25} \right) + 1 \left(\frac{4}{25} \right) = \frac{2}{5} = P$$

$$V(\hat{P}) = \sum \left(\hat{P} - \frac{2}{5} \right)^2 \cdot f(\hat{P})$$

$$= \left(0 - \frac{2}{5} \right)^2 \left(\frac{9}{25} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5} \right)^2 \left(\frac{12}{25} \right) + \left(1 - \frac{2}{5} \right)^2 \left(\frac{4}{25} \right)$$

$$= \frac{3}{25} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{5}}{2} = \frac{Pq}{n}$$



(b) 不放回抽樣 (有限母體) :

$$\hat{P} \text{ 分配類似超幾何分配 } f(\hat{P}) = \frac{C_{n\hat{P}}^2 C_{2-n\hat{P}}^3}{C_2^5}$$

$\hat{P}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(\hat{P})$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E(\hat{P}) = 0\left(\frac{3}{10}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{6}{10}\right) + 1\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{2}{5} = P$$

$$V(\hat{P}) = \left(0 - \frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{6}{10}\right) + \left(1 - \frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{9}{100}$$

$$= \frac{5-2}{5-1} \left(\frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{5}}{2} \right) = \frac{N-n}{N-1} \times \frac{Pq}{n}$$



例題 7-30

甲公司有 5,000 名員工，其中有 500 名員工是女性職員，今隨機抽取 100 名員工，則女性職員的比例小於 15% 之機率為何？

解： $P = \frac{500}{5,000} = 0.1$ (母體比例)

由於 $nP = 100 \times 0.1 = 10 \geq 5$ 且 $n(1 - P) = 100 \times 0.9 = 90 \geq 5$

$\therefore \hat{P}$ 分配可以近似常態分配 $n\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\right) = n\left(0.1, \frac{0.1 \times 0.9}{100}\right)$ 求解

$$P(\hat{P} < 0.15) = P\left(\frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} < \frac{0.15 - 0.1}{\sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{100}}}\right) = P(Z < 1.67) = 0.9525 \quad \text{❖}$$



例題 7-31

甲、乙兩箱產品的不良率分別為 7% 及 5%，今自兩箱產品中各抽出 200 件，試問在抽出樣本中甲產品不良率大於乙產品不良率在 3% 以上的機率為何？

解：由於① $n_1 P_1 = 200 \times 7\% = 14$ 且 $n_1(1 - P_1) = 200(1 - 0.07) = 186$ 均大於 5

② $n_2 P_2 = 200 \times 5\% = 10$ 且 $n_2(1 - P_2) = 200(1 - 0.05) = 190$ 均大於 5

$\therefore \hat{P}_1 - \hat{P}_2$ 抽樣分配可利用近似常態分配求解。

$$\begin{aligned} P(\hat{P}_1 - \hat{P}_2 > 0.03) &= P\left(Z > \frac{0.03 - (0.07 - 0.05)}{\sqrt{\frac{(0.07)(0.93)}{200} + \frac{(0.05)(0.95)}{200}}} \right) \\ &= P(Z > 0.42) = 1 - P(Z < 0.42) \\ &= 1 - 0.6628 = 0.3372 \end{aligned}$$

