

# 統計學題庫

## 一、緒論

1.1 下列調查結果何者屬於敘述統計？

- (a) 由於香蕉生產過剩，預計今年香蕉的平均價格將跌到每台斤不到 5 元台幣。
- (b) 由於政府施行禁煙規定，今年二月份的香煙銷售量較去年同期減少了 5
- (c) 由於全球金融風暴，紐約地區今年失業率將上升 6%。
- (d) 由於近年少子化的影響，預計自2010年開始，台灣的人口將呈現負成長。

1.2 下列調查結果何者屬於推論統計？

- (a) 因應政府拯救房市方案，今年初各大銀行紛紛調降房屋貸款利率，平均利率下降了 2 個百分點。
- (b) 由於政府去年鐵腕施行掃毒行動，今年上半年的犯罪率較去年同期減少了 5 個百分點。
- (c) 由於台灣地區鰻魚生產過剩，我們預計今年外銷鰻魚的平均價格將跌到每台斤不到 100 元台幣。
- (d) 於全球金融風暴，台灣地區今年一月份的失業率較去年同期上升了 0.6 個百分點。

1.3 母體之標準差即為母體的？

- (a)參數 (b)標準誤 (c)統計量 (d)變異數

1.4 抽查明新奶粉在全省四家商店的售價為200，195，195，210（元）。下列敘述何者屬於敘述統計學？

- (a)這四家商店所售明新奶粉的平均售價為200 元
- (b)全省所有商店所售明新牌奶粉的平均售價為200 元
- (c)全省有一半商店所售明新甲牌奶粉的售價低於200 元
- (d)全省有一半商店所售明新甲牌奶粉的售價是195 元

1.5 下列何者為母體參數

- (a)有五萬名網友參加的網路民調結果。
- (b)內政部每年公佈的台灣地區新生兒出生數。
- (c)行政院主計處調查顯示，上個月台灣地區失業率為 4.91%。
- (d)衛生局抽查冰店紅豆冰的不合格率。

## 解答

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | B | 2 | C | 3 | A | 4 | A | 5 | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

## 二、資料蒐集與整理

2.1 下列何種抽樣方法能得到不偏的民意調查？

- (a) 叩應(call-in，觀眾、聽眾自主電話回應調查問題)
- (b) 寫應(write-in，讀者自主寫信回應調查問題)
- (c) 白天在車站每10人取1人的調查訪談
- (d) 簡單隨機抽樣

2.2 上學時使用的交通工具的可選擇搭公車=1，騎機車=2，其他=3，這是何種量度尺度？。

- (a) 順序尺度
- (b) 區間尺度
- (c) 名目尺度
- (d) 以上皆非

2.3 下列何者為抽樣調查優於普查的不正確敘述？

- (a) 抽樣蒐集資料的速度較快
- (b) 抽樣蒐集資料的成本較低
- (c) 在某些狀況下，抽樣的價值僅止於蒐集樣本
- (d) 只要抽到足夠的樣本數，抽樣調查所取得的資料都呈常態分配

2.4 下列何者不是電話調查的優點？

- (a) 省時
- (b) 省錢
- (c) 所得樣本一定是簡單隨機抽樣
- (d) 電話調查可利用電腦輔助，通話中可直接輸入資料，可即刻檢查輸入資料的明顯錯誤。

2.5 統計學上有四種測量尺度：名目尺度、等級尺度、等比尺度，以及何種尺度？

- (a) 標準尺度
- (b) 有效尺度
- (c) 區間尺度
- (d) 類別尺度

2.6 就統計推論的合理性而言，下列何種抽樣方法較佳？

- (a) 非機率抽樣
- (b) 簡單隨機抽樣
- (c) 立意抽樣
- (d) 配額抽樣

2.7 “大隊接力賽跑中甲班得到冠軍，丁班得到亞軍”句中的“冠軍”“亞軍”，是何種量度尺度？

- (a) 順序尺度
- (b) 區間尺度
- (c) 名目尺度
- (d) 以上皆非

2.8 “阿丁體重75公斤”句中的“75公斤”，是何種量度尺度？

- (a) 順序尺度
- (b) 區間尺度
- (c) 名目尺度
- (d) 以上皆非

2.9 下列那種圖形是屬性資料可畫的圖形？

- (a) 直方圖
- (b) 肩形圖
- (c) 長條圖
- (d) 莖葉圖

2.10 因郵寄問卷回收率過低所成的偏估，可藉由下列何者方式避免？

- (a) 郵寄更多問卷
- (b) 對於樣本中未回答者，進行進一步調查
- (c) 對於樣本中回答者，進行進一步調查
- (d) 放棄未回答者的意見，把它當成無效樣本

2.11 對同一資料集編製幾種不同組距的次數分配表，則組距為最寬的次數分配表：

- (a) 組數最多
- (b) 組數最少
- (c) 各組發生的次數都變小
- (d) 與其他表的分組結果一樣各組發生次數一樣多

2.12 比較屬量成對樣本 (X, Y) 資料中，兩變數資料的分配是否一致，下列何種圖形最為恰當？

- (a) 兩直方圖
- (b) X 與 Y 的散佈圖
- (c) 莖葉圖
- (d) 圓餅圖

2.13 「溫度」在量度尺度分類中屬於下列那一種？

- (a) 名目尺度 (nominal scale)
- (b) 順序尺度 (ordinal scale)
- (c) 區間尺度 (interval scale)
- (d) 比率尺度 (ratio scale)

2.14 「王建民的球衣號碼」在量度尺度分類中屬於下列那一種？

- (a) 名目尺度 (nominal scale)
- (b) 順序尺度 (ordinal scale)
- (c) 區間尺度 (interval scale)
- (d) 比率尺度 (ratio scale)

2.15 某汽車公司想比較在去年與今年，公司銷售的輕型卡車及轎車的數目。下列何種圖形最為恰當？

- (a) 兩直方圖
- (b) 兩長條圖
- (c) 莖葉圖
- (d) 圓餅圖

2.16 下列何者不是莖葉圖的優點：

- (a) 提供原始數值及其取得條件。
- (b) 較容易製作，就算有數值遺漏或重複，可立即補足或刪除，不必重新繪製。
- (c) 便利閱讀。
- (d) 容易讀出各分組的百分比。

2.17 下列何者不是長條圖的特性：

- (a) 各長條依其長度而區別，與其寬度無關。
- (b) 各長條間應留空隙，勿連接在一起，以利區分。
- (c) 各長條依某一變數特性的順序排列，使其易於分析，並求美觀。
- (d) 各長條間連接在一起，以求美觀。

2.18 調查化妝品市場消費者職業別，可用下列何種尺度來衡量？

- (a) 名目尺度 (nominal scale)
- (b) 順序尺度 (ordinal scale)
- (c) 區間尺度 (interval scale)
- (d) 無法判斷

2.19 友愛有線電視公司為預測晚間新聞節目的收視率，在收視戶中加裝收視率監控器，這種資料蒐集的方法是屬：

- (a)派員調查 (b)郵寄問卷調查 (c)實驗性資料 (d)觀察性資料

2.20 要將累積次數用圖表示，下列何種圖形最為恰當？

- (a).肩形圖 (b)圓餅圖 (c)直方圖 (d)次數多邊形圖

## 解答

|    |   |    |   |    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|
| 1  | D | 2  | C | 3  | D | 4  | C | 5  | C |
| 6  | B | 7  | A | 8  | D | 9  | C | 10 | B |
| 11 | B | 12 | A | 13 | C | 14 | A | 15 | B |
| 16 | D | 17 | D | 18 | A | 19 | D | 20 | A |

## 三、敘述統計

3.1 下列那個統計量無法顯示資料變異的程度？

- (a) 四分位距 (b) 標準差 (c)中位數 (d) 全距

3.2 若某組資料之標準差為0，則下列敘述何者為真？

- (a)資料分配成對稱 (b) 平均數大於中位數  
(c)資料中所有觀察值都相同 (d)資料中觀察值的數值，正負各佔一半

3.3 一隨機樣本數據為：2, 4, 6, 8, 10,12，則：

- (a)中位數為7 (b)全距為7 (c)眾數為7 (d)平均數為7

3.4 下列那一個配對可以提供關於次數分配之偏態方面的情報：

- (a) 眾數、平均數 (b) 標準差、中位數 (c) 中位數、平均數 (d) 以上皆非

3.5 分配的第三級動差是在衡量分配的：

- (a) 離散程度(Degree of dispersion) (b) 中央趨勢(Central tendency)  
(c) 峰度(Peakedness) (d) 偏態(Skewness)

3.6 吾人觀測了一組資料：3,5,2,4,6,5,9,5,7,8,下列何者正確？

- (a)平均數>中位數 (b)中位數>眾數 (c)平均數>眾數 (d)以上皆非

**題解：** 資料為2,3,4,5, 5, 5, 6, 7,8,9,故眾數=5，中位數=5，平均數=5.4

3.7 四群學生，人數是10、20、30、40 人，平均體重分別是50、55、60、65 公斤，

則全部學生的平均體重是（四捨五入）：

- (a)55      (b)57      (c)60      (d)資料不足，不能計算

**題解：**  $(10 \times 50 + 20 \times 55 + 30 \times 60 + 40 \times 65) / (10 + 20 + 30 + 40) = 60$

3.8 下列那一個統計量較可能同時表示一組樣本中，體重的變異程度高於身高的變異程度：

- (a)四分位距 (b)標準差 (c)全距 (d)變異係數

3.9 何種測量離散程度的測度量最易受到極端值的影響？

- (a)標準差 (b)四分位距 (c)變異數 (d)全距

3.10 飲料工廠有兩條生產線，A 生產線產出250c.c.的飲料且產品容量的標準差為2c.c.，B 生產線產出500c.c.的飲料且產品容量的標準差為3c.c.，就產品容量的觀點而言：

- (a) 生產線的品質較佳      (b)生產線的品質較佳      (c)兩條生產線品質一樣  
(d) 難以斷論

**題解：** A生產線的變異係數 $=2/250=0.008$ 大於B 生產線的變異係數 $=3/500=0.006$ ，故B 生產線的品質較佳

3.11 阿美班上期中考的會計學與統計學成績統計如下；全班會計學的平均分數為65 分，標準差為5 分，統計學的平均分數為70 分，標準差為7 分。阿美會計學得78 分，統計學得84 分，相較於全班同學，阿美：

- (a)會計學成績較佳      (b)統計學成績較佳  
(c)會計學與統計學一樣好      (d)平均數與標準差皆不同，兩科成績無法比較

**題解：** 阿美會計學在全班 $(78-65)/5=2.6$ 個標準差位置

阿美統計學在全班 $(84-70)/7=2$ 個標準差位置，故其會計學成績相對較佳

3.12 下列敘述何者恆為正確？

- (a)一組資料的最大值為100，最小值為0，其中位數為50，則此資料為對稱資料  
(b)以算術平均數為中心的標準差，較以任何其他平均數為中心的標準差小  
(c)若二組資料有相同平均數且皆為正數，則標準差愈大者，變異係數（C.V.）愈小  
(d)兩組不同單位的資料可藉全距比較資料之離散程度

3.13 下列敘述何者可能不正確？

- (a)一組資料的最大值為100，最小值為0，其中位數為60，則此資料右偏  
(b)一組資料的所有數值與其算術平均數的差，其總和為0  
(c)若二組資料有相同標準差，且平均數皆為正數，則平均數愈大者，變異係數（C.V.）愈小  
(d)兩組不同單位的資料可藉變異係數（C.V.）比較資料之離散程度

3.14 一組數據資料中，若平均數減去中位數的值是很大的正數時，則下列敘述何者正確？

- (a)中位數必須小於零      (b)平均數必須是大的正數  
(c)中位數必須小於零同時平均數必須大於零      (d)資料分佈呈右偏

3.15 某一國際大公司招考員工時，初試必須先考滿分為200 分之英語測驗，再以其分數高低決定面試與否。過去經驗顯示測驗分數為鐘形分配。假設今年公司預定錄取分數最好的16人面試，而報考人數有100人，計算其平均成績為150 分和標準差為15 分。該公司面試前錄取分數會：

- (a)比150 分高      (b)比165 分高      (c)比180 分高      (d)比195 分高

**題解：**

依經驗法則，鐘形分配下，與平均數距離一個標準差內的範圍占全體資料的68%，故比平均數大一個標準差的範圍占全體資料的16%，平均成績150 分加一個標準差15 分，得165 分

3.16 一組樣本的觀察值為 3, 5, 7, 5, 6, 7，則「樣本眾數」為：

- (a) 5      (b) 5.5      (c) 7      (d) 5與7

3.17 5位學生每人投籃8次，而投中球數分別為4, 4, 5, 5, 6，則投中次數的第一個四分位數是：

- (a) 4 (b) 5 (c) 5.5 (d) 6

3.18 5位學生每人投籃8次，而投中球數分別為4, 4, 5, 5, 6，則投中次數的標準差為何？

- (a)  $\sqrt{2.8/4}$  (b)  $\sqrt{2.8/5}$  (c)  $\sqrt{3/4}$  (d)  $\sqrt{3/5}$

3.19 一組數據中，介於第一個四分位數和第六十分位數之間的數據比例為：

- (a) 20%      (b) 35%      (c) 40%      (d) 65%

**題解：**60-25=35%

3.20 下列何者不是算術平均數的特性？

- (a) 位於中央位置的資料值      (b) 是整個資料的平衡點  
(c) 與資料差異的總和為0      (d) 與資料差異的平方和是最小的

3.21 一組資料如右：1, 2, 3, 5, 8, 10, 12, 17, 22, 26, 29, 30，其第3個四分位數為：

- (a) 17      (b) 22      (c) 24      (d) 26

**題解：** $n=12$ ，第3個四分位數位於 $3 \times (12/4) = 9$ ，故為第9個與第10個數字的平均  
 $= (22 + 26) / 2 = 24$

3.22 某班50名學生之統計學平均成績為68分，若已知一名學生成績登記錯誤，40分更正為65分，試求更正後之全班平均成績=\_\_\_\_\_。

**題解**  $[68 \times 50 - (65 - 40)] / 50 = 68.5$

3.23 某班50名學生之統計學成績平均數為68分，標準差為10分，若已知一名學生成績登記錯誤，40分更正為65分，試求更正後之全班成績的標準差=\_\_\_\_\_。

**題解** 原平方和=(變異數+均值平方)\*50=(100+68\*68)\*50=236200

新平方和=原平方和-40\*40+65\*65=236200-1600+4225=238825

新均值平方= $[68 \times 50 - (65 - 40)] / 50 = 68.5$

新變異數=新平方和/50-新均值平方=238825/50-68.5\*68.5=84.25

標準差=9.179

3.24 一班級男生 20 人，女生 30 人，已知某次統計學測驗成績，男生的平均數為 65 分，標準差為 12 分，女生的平均數為 70 分，標準差為 10 分，則此次統計學測驗，全班 50 人成績的平均數=\_\_\_\_\_

68

**題解** 平均數=(20\*65+30\*70)/(20+30)=68

3.25 一班級男生 20 人，女生 30 人，已知某次統計學測驗成績，男生的平均數為 65 分，標準差為 12 分，女生的平均數為 70 分，標準差為 10 分，則此次統計學測驗，全班 50 人成績的，標準差=\_\_\_\_\_。

**題解** 變異數= $[20 \times 12 \times 12 + 30 \times 10 \times 10 + 20 \times (65 - 68) \times (65 - 68) + 30 \times (70 - 68) \times (70 - 68)] / (20 + 30)$

=6180/50=123.6

標準差=11.12

3.26 某班學生之統計學成績平均數為 45 分，標準差為 15 分，老師決定調整成績，試求以下列方式調整成績後的平均數和標準差；

每人加 20 分，則平均數=\_\_\_\_\_，標準差=\_\_\_\_\_。

**題解** 平均數=45+20=65 分 標準差=15

3.27 某班學生之統計學成績平均數為 45 分，標準差為 15 分，老師決定調整成績，試求以下列方式調整成績後的平均數和標準差；

每人成績乘以 1.5 倍，則平均數=\_\_\_\_\_，標準差=\_\_\_\_\_。

**題解** 平均數=45\*1.5=67.5 標準差=15\*1.5=22.5

3.28 某班學生之統計學成績平均數為 45 分，標準差為 15 分，老師決定調整成績，試求以下列方式調整成績後的平均數和標準差；

每人成績乘以 1.5 倍後，再加 5 分，則平均數=\_\_\_\_\_，標準差=\_\_\_\_\_。

**題解** 平均數=45\*1.5+5=72.5 標準差=15\*1.5=22.5

## 解答

|    |       |    |           |    |           |    |    |    |       |
|----|-------|----|-----------|----|-----------|----|----|----|-------|
| 1  | C     | 2  | C         | 3  | A,D       | 4  | D  | 5  | D     |
| 6  | A,C   | 7  | C         | 8  | D         | 9  | D  | 10 | B     |
| 11 | A     | 12 | B         | 13 | A         | 14 | D  | 15 | B     |
| 16 | D     | 17 | A         | 18 | A         | 19 | B  | 20 | A     |
| 21 | C     | 22 | 68.5      | 23 | 9.179     | 24 | 68 | 25 | 11.12 |
| 26 | 65;15 | 27 | 76.5;22.5 | 28 | 72.5;22.5 |    |    |    |       |

## 四、機率概論

4.1 若王先生得到甲工作的機率為0.5，得到乙工作的機率為0.6，在得到甲工作的條件下，王先生會得到乙工作的機率為0.5，請問王先生同時會得到甲工作及乙工作的機率為何？

- (a)1.1 (b)0.6 (c)0.3 (d)0.25

**題解：**  $P(A)=0.5$   $P(B)=0.6$   $P(B|A)=0.5$   $P(A \cap B) = P(B|A) P(A) = 0.5 * 0.5 = 0.25$

4.2 若李先生得到甲工作的機率為0.5，得到乙工作的機率為0.6，在得到甲工作的條件下，李先生會得到乙工作的機率為0.5，請問李先生會得到甲工作或乙工作的機率為何？

- (a)1.1 (b)0.85 (c)0.75 (d)0.6

**題解：**  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.6 - 0.25 = 0.85$

4.3 彩券的中獎號碼是由四個箱中各抽一個號碼球，而每個箱內有0 到9 的號碼球各一顆，則樣本空間中有多少樣本點？

- (a)40 (b)729 (c)1000 (d)10000

**題解：**  $10 * 10 * 10 * 10 = 10000$

4.4 二個互斥事件A、B，機率分別是0.5、0.6，則 $\Pr\{A^c \cup B^c\} = ?$  (註： $A^c$ ， $B^c$  分別表示 A、B 的餘集合)

- (a)0.7 (b)0.8 (c)0.9 (d)1.0

**題解：** 二個互斥事件A、B 得 $P(A \cap B) = 0$ ，而 $\Pr\{A^c \cup B^c\} = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0 = 1$



4.5 二個獨立事件A、B，機率分別是0.5、0.6，則 $\Pr\{A \cup B\} = ?$

- (a)0.9      (b)0.8      (c)0.7      (d)0.6

**題解：** 二個獨立事件A、B得 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3$

則 $\Pr\{A \cup B\} = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.6 - 0.3 = 0.8$

4.6 設5位助理的薪水分別是（單位：千元）25, 27, 30, 32, 36，平均是30，現在隨機抽出3人，則其中2人的薪水大於平均30的機率是：

- (a)0.3      (b)0.4      (c)0.5      (d)0.6

**題解：**  ${}_3C_1 \cdot {}_2C_2 / {}_5C_3 = [3 \cdot 1] / [5 \cdot 4 \cdot 3 / 3!] = 3/10$

4.7 擲一枚公正的骰子8次結果8次均出現奇數點，則擲第9次時：

- (a)出現奇數點的機率比較出現偶數點的機率高  
(b)出現偶數點的機率比較出現奇數點的機率高  
(c)出現偶數點的機率與出現奇數點的機率一樣大  
(d)應該會出現偶數點

4.8 某公司生產鬧鐘，有10%的不良率。此公司為了商譽，對每一個鬧鐘做品質檢驗以區分產品是否不良，並分類為“通過”或“不通過”，若檢驗員有5%的機會分類錯誤，則被分類為“通過”的百分比，最接近下列那一項？

- (a)80%      (b)85%      (c)90%      (d)95%

**題解：** 已知 $P(\text{不良}) = 0.1$ ，分類錯誤， $P(\text{通過}|\text{不良}) = 0.05$ ， $P(\text{不通過}|\text{良}) = 0.05$ 。則 $P(\text{通過}) = P(\text{通過}|\text{不良})P(\text{不良}) + P(\text{通過}|\text{良})P(\text{良}) = 0.05 \cdot 0.1 + (1 - 0.05) \cdot (1 - 0.1) = 0.86$

4.9 某公司生產鬧鐘，有10%的不良率。此公司為了商譽，對每一個鬧鐘做品質檢驗以區分產品是否不良，並分類為“通過”或“不通過”，若檢驗員有5%的機會分類錯誤，如果只有被分類為“通過”的鬧鐘，可對外販賣；被分類為“不通過”的，則被鬧鐘報廢丟棄。問可對外販賣的燈泡中，是良品的百分比，最接近下列那一項？

- (a)90%      (b)93%      (c)96%      (d)99%

**題解：**  $P(\text{良}|\text{通過}) = P(\text{良} \cap \text{通過}) / P(\text{通過}) = (1 - 0.05) \cdot (1 - 0.1) / 0.86 = 0.855 / 0.86 = 0.994$

4.10 某公司生產的零件來自甲、乙兩工廠，甲工廠生產其中70%，不良率是0.5%，乙工廠生產其餘30%，不良率是1%，則該公司螺絲不良率是：

- (a)0.3%      (b)0.38%      (c)0.5%      (d)0.65%

**題解：**  $0.7 \cdot 0.005 + 0.3 \cdot 0.01 = 0.0065 = 0.65\%$

4.11 投一公正骰子一次(有6面，分別是1,2,3,4,5,6點)，則出現點數的期望值是：

- (a)3      (b)3.5      (c)4      (d)依出現點數而定

4.12 假定

$P(A_1) = 0.2$  ,  $P(A_2) = 0.8$  ,  $P(B|A_1) = 0.2$  ,  $P(B|A_2) = 0.4$  , 那麼  $P(A_1|B) = ?$   
(a)0.10 (b)0.111 (c)0.182 (d)0.250

**題解:**  $P(A_1|B) = P(A_1 \cap B) / P(B) = P(B|A_1) * P(A_1) / [P(B|A_1) * P(A_1) + P(B|A_2) * P(A_2)]$   
 $= 0.2 * 0.2 / [0.2 * 0.2 + 0.4 * 0.8] = 1/9$

4.13 袋中有相同大小的1 個黑球與1 個白球。事件A 表示第1 球取到白球，事件B 表示第2 球取到白球。一次取1 球，而且取出不放回，則下列敘述何者正確：

- (a) A 與B 是互斥事件且A 與B 是獨立事件
- (b) A 與B 是互斥且事件A 與B 是相依事件
- (c) A 與B 不互斥且事件A 與B 是相依事件
- (d) A 與B 不互斥且A 與B 是獨立事件

**題解:** 因取出不放回，第1 球取到白球後第2 球取不到白球，故A 與B 是互斥事件， $P(A) = 1/2$  ,  $P(B) = P(\text{第一球取到黑球}) * P(\text{第二球取到白球} | \text{第一球取到黑球}) + P(\text{第一球取到白球}) * P(\text{第二球取到白球} | \text{第一球取到白球}) = 1/2 * 1 + 1/2 * 0 = 1/2$  ,

$P(A \cap B) = 0 \neq P(A) * P(B) = 1/2 * 1/2$  , 故A 與B 是相依事件

4.14 袋中有相同大小的1 個黑球與1 個白球。「事件」A 代表第1 球取到白球，「事件」B 代表第2 球取到白球。一次取1 球，而且取出放回，則下列敘述何者正確：

- (a) A 與B 是互斥事件且A 與B 是獨立事件
- (b) A 與B 是互斥且事件A 與B 是相依事件
- (c) A 與B 不互斥且事件A 與B 是相依事件
- (d) A 與B 不互斥且A 與B 是獨立事件

**題解:** 因取出放回，第1 球取到白球後，放回，故袋中恢復原狀，第2 球取到白球的機率與第1 球相同， $P(A) = P(B) = 1/2$  , 故A 與B 可以同時發生，不互斥，且 $P(A \cap B) = P(A) * P(B) = 1/2 * 1/2$  , 故A 與B 是獨立事件

4.15 袋中有相同大小的1 個黑球與2 個白球。事件A 表示第1 球取到白球，事件B 表示第2 球取到白球。一次取1 球，而且取出不放回，則下列敘述何者正確：

- (a) A 與B 是互斥事件且A 與B 是獨立事件
- (b) A 與B 是互斥且事件A 與B 是相依事件
- (c) A 與B 不互斥且事件A 與B 是相依事件
- (d) A 與B 不互斥且A 與B 是獨立事件

**題解:** 因取出不放回，第1 球取到白球後，袋中仍有一個白球，故第2 球可取到白球，故A 與B 可以同時發生，不互斥， $P(A) = 2/3$  ,  $P(B) = P(\text{第一球取到黑球}) * P(\text{第二球取到白球} | \text{第一球取到黑球}) + P(\text{第一球取到白球}) * P(\text{第二球取到白球} | \text{第一球取到白球}) = 1/3 * 2/2 + 2/3 * 1/2 = 1/2$  ,

球取到白球|第一球取到黑球)+  $P(\text{第一球取到白球}) \cdot P(\text{第2球取到白球} | \text{第一球取到白球}) = 1/3 \cdot 1 + 2/3 \cdot 1/2 = 2/3$ ,  $P(A \cap B) = P(\text{第一球取到白球}) \cdot P(\text{第2球取到白球} | \text{第一球取到白球}) = 2/3 \neq P(A) \cdot P(B) = 2/3 \cdot 1/2$ , 故A與B是相依事件

4.16 連續丟二個公平銅板，丟第四次才發生一正一反的機率是：

- (a)  $1/16$  (b)  $1/8$  (c)  $3/16$  (d)  $1/4$

**題解：**每次丟二個公平銅板出現一正一反的機率是 $1/2$ ，丟第四次才發生一正一反的機率是 $1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/16$

4.17 設生男生女之機率各為 $1/2$ ，且互相獨立。某夫婦生了3個小孩，則恰是1男2女的機率是：

- (a)  $1/8$  (b)  $1/4$  (c)  $3/8$  (d)  $1/2$

4.18 投一公正骰子一次，定義A,B,C三事件如下： $A = \{\text{出現數字是偶數}\}$ ， $B = \{\text{出現數字是小於4}\}$ ， $C = \{\text{出現數字是大於4}\}$ 。那麼 $\Pr(A \cap (B \cup C))$ 為何？(即 $A \cap (B \cup C)$ 之機率) (a)  $1/6$  (b)  $1/3$  (c)  $1/2$  (d)  $2/3$

**題解：** $B \cup C = \{\text{出現數字是1, 2, 3, 5, 6}\}$ ， $A \cap (B \cup C) = \{2, 6\}$ ， $\Pr(A \cap (B \cup C)) = 2/6 = 1/3$

4.19 某疾病的發生率為1%，而某藥廠宣稱他們發展出一種很準確的檢測藥劑：若有病則檢測結果為陽性(有病)的機率是99%，若無病則檢測結果為陰性(沒病)的機率也是99%。現隨機選一人，則檢測結果為陽性的機率最接近：

- (a) 1% (b) 2% (c) 50% (d) 99%

**題解：**已知 $P(\text{有病}) = 0.01$ ， $P(\text{陽性反應} | \text{有病}) = 0.99$ ， $P(\text{陰性反應} | \text{無病}) = 0.99$ 。則 $P(\text{陽性反應}) = P(\text{陽性反應} | \text{有病}) P(\text{有病}) + P(\text{陽性反應} | \text{無病}) P(\text{無病}) = 0.99 \cdot 0.01 + (1 - 0.99) \cdot (1 - 0.01) = 0.0198$

4.20 某疾病的發生率為1%，而某藥廠宣稱他們發展出一種很準確的檢測藥劑：若有病則檢測結果為陽性(有病)的機率是99%，若無病則檢測結果為陰性(沒病)的機率也是99%。現某人檢驗結果為陽性(顯示帶病)，則他真的帶病的機率最接近：

- (a) 1% (b) 2% (c) 50% (d) 99%

**題解：**已知 $P(\text{有病}) = 0.01$ ， $P(\text{陽性反應} | \text{有病}) = 0.99$ ， $P(\text{陰性反應} | \text{無病}) = 0.99$ 。則 $P(\text{陽性反應}) = P(\text{陽性反應} | \text{有病}) P(\text{有病}) + P(\text{陽性反應} | \text{無病}) P(\text{無病}) = 0.99 \cdot 0.01 + (1 - 0.99) \cdot (1 - 0.01) = 0.0198$

$$P(\text{有病}|\text{陽性反應}) = P(\text{陽性反應} \cap \text{有病}) / P(\text{陽性反應}) = P(\text{陽性反應}|\text{有病}) P(\text{有病}) / P(\text{陽性反應}) = 0.99 * 0.01 / [0.99 * 0.01 + (1 - 0.99) * (1 - 0.01)] = 1/2$$

4.21 假設台灣地區婦女就業調查中發現，40%在上班，60%為家庭主婦。若已知在上班工作的婦女中，大學畢業者佔 50%；在家庭工作的家庭主婦中，大學畢業者佔 60%。從所有婦女中隨機抽取一人，其為大學畢業者的機率是多少？

- (a) 0.45 (b) 0.56 (c) 0.67 (d) 0.78

**題解：** $P(\text{大學畢業者}) = P(\text{大學畢業者}|\text{在上班工作}) * P(\text{在上班工作}) + P(\text{大學畢業者}|\text{家庭主婦}) * P(\text{家庭主婦}) = 0.5 * 0.4 + 0.6 * 0.6 = 0.56$

4.22 假設台灣地區婦女就業調查中發現，40%在上班，60%為家庭主婦。若已知在上班工作的婦女中，大學畢業者佔 50%；在家庭工作的家庭主婦中，大學畢業者佔 60%。從所有婦女中隨機抽取一人，若被抽中者是大學畢業者，則其在上班工作的機率是多少？

- (a) 0.135 (b) 0.246 (c) 0.357 (d) 0.468

**題解：** $P(\text{大學畢業者}) = P(\text{大學畢業者}|\text{在上班工作}) * P(\text{在上班工作}) + P(\text{大學畢業者}|\text{家庭主婦}) * P(\text{家庭主婦}) = 0.5 * 0.4 + 0.6 * 0.6 = 0.56$

$P(\text{在上班工作}|\text{大學畢業者}) = P(\text{大學畢業者}|\text{在上班工作}) * P(\text{在上班工作}) / P(\text{大學畢業者}) = 0.5 * 0.4 / 0.56 = 0.357$

4.23 從台灣全省抽樣 1,000 家公司，調查其去年的業績，發現結果如下：業績成長的有 150 家，業績衰退的有 550 家，業績不變的有 300 家，而其中服務業所佔的比例分別為 45%，30%，50%。若從中選取一家公司，其為服務業的機率為若干？

- (a) 0.3825 (b) 0.4016 (c) 0.4167 (d) 0.4207

**題解**

$$P(\text{服務業}) = P(\text{服務業}|\text{業績成長}) * P(\text{業績成長}) + P(\text{服務業}|\text{業績衰退}) * P(\text{業績衰退}) +$$

$$P(\text{服務業}|\text{業績不變}) * P(\text{業績不變})$$

$$= 0.15 * 0.45 + 0.55 * 0.30 + 0.30 * 0.50 = 0.0675 + 0.165 + 0.15 = 0.3825$$

4.24 從台灣全省抽樣 1,000 家公司，調查其去年的業績，發現結果如下：業績成長的有 150 家，業績衰退的有 550 家，業績不變的有 300 家，而其中服務業所佔的比例分別為 45%，30%，50%。若從中選取一家公司，已知其為服務業，則其去年業績成長的機率為若干？

- (a) 0.151 (b) 0.176 (c) 0.189 (d) 0.207

**題解：** $P(\text{業績成長}|\text{服務業}) = P(\text{業績成長} \cap \text{服務業}) / P(\text{服務業})$

$P(\text{服務業}) = P(\text{服務業}|\text{業績成長}) \cdot P(\text{業績成長}) + P(\text{服務業}|\text{業績衰退}) \cdot P(\text{業績衰退}) +$

$P(\text{服務業}|\text{業績不變}) \cdot P(\text{業績不變})$

$$= 0.15 \cdot 0.45 + 0.55 \cdot 0.30 + 0.30 \cdot 0.50 = 0.0675 + 0.165 + 0.15 = 0.3825$$

$P(\text{業績成長}|\text{服務業}) = P(\text{業績成長} \cap \text{服務業}) / P(\text{服務業}) = P(\text{服務業}|\text{業績成長}) \cdot P(\text{業績成長}) / P(\text{服務業}) = 0.0675 / 0.3825 = 0.176$

4.25 從台灣全省抽樣 1,000 家公司，調查其去年的業績，發現結果如下：業績成長的有 120 家，業績衰退的有 580 家，業績不變的有 300 家，而其中服務業所佔的比例分別為 45%，30%，50%。若從中選取一家公司，所選取的公司不為服務業的機率為若干？ (a) 0.3475 (b) 0.4167 (c) 0.5833 (d) 0.6175

**題解：**

$P(\text{非服務業}) = P(\text{非服務業}|\text{業績成長}) \cdot P(\text{業績成長}) + P(\text{非服務業}|\text{業績衰退}) \cdot P(\text{業績衰退}) + P(\text{非服務業}|\text{業績不變}) \cdot P(\text{業績不變})$   
 $= 0.15 \cdot 0.55 + 0.55 \cdot 0.70 + 0.30 \cdot 0.50 = 0.0825 + 0.385 + 0.15 = 0.6175$

4.26 若  $P(A) = 0.8$ ,  $P(B) = 0.7$  且  $P(A \cup B) = 0.90$ , 則  $P(A \cap B) =$   
(a) 0.5 (b) 0.6 (c) 0.7 (d) 0.8

**題解：**  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.8 + 0.7 - 0.9 = 0.6$

4.27 若  $P(A) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.4$  且  $P(A \cap B) = 0.25$ , 則  $P(A|B) =$   
(a) 0.556 (b) 0.625 (c) 0.833 (d) 0.875

**題解：**  $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B) = 0.25 / 0.4 = 0.625$

4.28 若  $P(A) = 0.30$ ,  $P(B) = 0.40$ ,  $P(A \cap B) = 0.06$ , 則  $A$  與  $B$  為：  
(a) 獨立事件 (b) 相依事件 (c) 互斥事件 (d) 互補事件

**題解：**  $P(A \cap B) = 0.06 \neq P(A) \cdot P(B) = 0.30 \cdot 0.40 = 0.12$ , 故  $A$  與  $B$  為相依事件

4.29 若  $A$  與  $B$  為獨立事件， $P(A) = 0.7$  且  $P(A|B) = 0.7$ , 則  $P(B) =$   
(a) 1.00 (b) 0.7 (c) 0.49 (d) 資料不足無法決定

4.30 若  $P(A) = 0.6$ ,  $P(B) = 0.5$ , 且  $P(A \cap B) = 0.4$ , 則  $P(A \cup B) =$   
(a) 0.6 (b) 0.7 (c) 0.8 (d) 0.9

**題解：**  $P(A \cup B) = 0.6 + 0.5 - 0.4 = 0.7$

## 解答

|    |   |    |   |    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|
| 1  | D | 2  | B | 3  | D | 4  | D | 5  | B |
| 6  | A | 7  | C | 8  | B | 9  | D | 10 | D |
| 11 | B | 12 | B | 13 | B | 14 | A | 15 | C |
| 16 | A | 17 | C | 18 | B | 19 | B | 20 | C |
| 21 | B | 22 | C | 23 | A | 24 | B | 25 | D |
| 26 | B | 27 | B | 28 | B | 29 | D | 30 | B |

## 五、間斷型機率分配

### (一)、選擇題：

1. 以投擲一枚六面骰子一次的隨機試驗，下列那一個隨機變數的定義是正確的？

|                                                                 |                                                  |
|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| (A) $X = 1$ ，如出現偶數<br>2，如出現奇數<br>3，如出現 1, 2, 3<br>4，如出現 4, 5, 6 | (B) $X = 1$ ，如出現 1, 2, 3<br>2，如出現 4<br>3，如出現 5   |
| (C) $X = 1$ ，如出現 1, 6<br>0，如出現 2, 3, 4, 5                       | (D) $X = \text{贏}$ ，如出現 6<br>輸，如出現 1, 2, 3, 4, 5 |

2. 一個不公正六面骰子，號碼 (2、5) 每面出現的機率都是  $1/4$ 、 $1/4$ ，號碼 (1、3、4、6) 每面出現的機率都是  $1/8$ 。令  $X$  為擲這個骰子兩次的點數和。請問  $X$  等於 9 的機率為何？  
(A)  $5/64$  (B)  $7/64$  (C)  $3/32$  (D)  $1/9$
3. 一個不公正六面骰子，號碼 (2、5) 每面出現的機率都是  $1/4$ 、 $1/4$ ，號碼 (1、3、4、6) 每面出現的機率都是  $1/8$ 。令  $X$  為擲這個骰子兩次的點數和，請問  $X$  大於或等於 4 且小於或等於 10 的機率為何？  
(A)  $5/6$  (B)  $27/32$  (C)  $5/36$  (D)  $53/64$
4. 盒中有 10 個球，其中 4 個紅球，6 個黑球；以不放回抽樣方式隨機選取 4 球。令隨機變數  $X$  表示黑球數，請問機率  $P(X \geq 2)$  之值為何？  
(A) 0.0485 (B) 0.1191 (C) 0.1256 (D) 0.167

5. 假設一上市股票依過去股價分析可知隔天上升1 元的機率為0.4，維持相同股價的機率為0.4，而隔天下降1 元的機率為0.2，當某日的成交價格為80 元時，問明日的期望價格為何？  
(A) 79.8 元 (B) 80.2 元 (C) 81 元 (D) 78 元
6. 假定 $X$  為一隨機變數，且其 $E(X)=100$ ， $\sigma^2(X)=60$ 。變數 $Y$  為 $X$  的線性函數， $Y=2X+150$ 。那麼  $E(Y)$ ， $\sigma^2(Y)$ 各為多少：  
(A) 200；210 (B) 350；120 (C) 350；240 (D) 250；60
7. 某私立高中應屆畢業生有60%會考進國立大學。令 $X$  為隨機選出100人考進國立大學的人數。請問  $X$  的標準差為何？  
(A) 4.90 (B) 3.24 (C) 3.8730 (D) 10.5
8. 在一個班級共有30位男生與20位女生，隨機抽出5人參加演講比賽，設隨機變數 $X$ 是抽出的女生人數，則隨機變數 $X$ 的機率分配是：  
(A) 常態分配 (B) 二項分配 (C) 幾何分配 (D) 超幾何分配
9. 假設在太平洋捕鮭作業中捕獲畸形鮭魚的機率為0.2%，今欲求從該處捕獲的1000 條鮭魚中最多有兩條魚為畸形魚的機率，應該用何種統計方法較適宜？  
(A) 常態(normal)分配 (B) 超幾何分配 (C) 卜瓦松(Poisson)分配 (D) F 分配
10. 已知一錄音室 180 分鐘之光碟片的錯誤數服從平均數為 6 的卜瓦松(Poisson)分配，隨機抽取一片 180 分鐘之光碟片，已播放前 30 分鐘，未出現錯誤，則接著的 60 分鐘不會出現錯誤的機率為：  
(A) 0.0498 (B) 0.1353 (C) 0.3679 (D) 0.9502
11. 長榮航空 747 班機預售了 300 個座位，但此班機只有 298 個可供乘客使用，假設平均有2%旅客取消其班機，試求無人取消班機之機率為：  
(A)  $e^{-6}$  (B)  $e^{-4}$  (C)  $e^{-2}$  (D)  $e^2$
12. 設產品不良率為0.02，隨機從產品中取出 200 件檢查。令 200 件中不良品個數為 $X$ ，則機率 $P(X \geq 3)$  之近似值為何？  
(A) 0.3234 (B) 0.7619 (C) 0.488 (D) 0.594
13. 盒中有 10 個球，其中 3 個紅球，5 個黑球，2 個白球；以歸還方式隨機選取 3 球。令 $X$  表示紅球數，令 $Y$  表示黑球數，請問機率 $P(X=1, Y=2)$ 之值為何？

- (A) 1/5            (B) 1/4            (C) 1/9            (D) 1/6
14. 假設有兩個離散型隨機變數 $X$ 和 $Y$ ，其聯合機率分配是 $f(x, y) = k(x+y)$ ， $x = 1, 2, 3$ ； $y = 0, 1, 2$ 。試問  $k = ?$   
 (A) 1/12            (B) 1/18            (C) 1/21            (D) 1/27
15. 假設有兩個離散型隨機變數 $X$ 和 $Y$ ，其聯合機率分配是 $f(x, y) = k(x+y)$ ， $x = 1, 2, 3$ ； $y = 0, 1, 2$ 。  $\Pr(Y = 2) = ?$   
 (A) 1/2            (B) 1/5            (C) 4/9            (D) 2/15
16. 設隨機變數 $X$  與 $Y$  為獨立變數，則下列何者為正確？（其中 $E(X)$ ， $E(Y)$ 為 $X$  與 $Y$  的期望值， $\text{VAR}(X)$ ， $\text{VAR}(Y)$ 為 $X$  與 $Y$  的變異數）  
 (A)  $E(X/Y) = E(X)/E(Y)$             (B)  $E(X|Y) = E(Y|X)$             (C)  $\text{VAR}(Y|X) = \text{VAR}(X|Y)$   
 (D)  $\text{VAR}(X+Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y)$
17. 有關波松隨機變數（Poisson random variable）的陳述下列何者正確？  
 (A) 具無限多個可能值的離散隨機變數            (B) 具有限多個可能值的離散隨機變數  
 (C) 具無限多個可能值的連續隨機變數            (D) 具有限多個可能值的連續隨機變數
18. 假設鑽探1 口井會發現天然氣之機率為0.36，而且每次鑽探之結果互為「獨立」。今欲求算鑽探少於 10 次就會發現第1口天然氣井的機率。這個問題中的隨機變數具有什麼機率分配？  
 (A) 二項分配            (B) 負二項分配            (C) 幾何分配            (D) 卜瓦松分配
19. 一個養鵝場中體重超過 4 公斤的豬隻占0.25的機率，求算隨機抓取20隻鵝，會發現5 隻超過 4 公斤的機率。這個問題中的隨機變數具有什麼機率分配？  
 (A) 二項分配            (B) 負二項分配            (C) 幾何分配            (D) 卜瓦松分配
20. 袋中共有10 個球，其中有2 個紅球。一次取1 球，取出不放回，則第2 球會取到紅球之機率為：  
 (A) 2/10            (B) 2/9            (C) 1/9            (D) 不一定



## (二)、填充題：

21. 有一個隨機變數X，其機率分配如下：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2}{x!} & x = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{其它值} \end{cases}$$

則常數a等於\_\_\_\_\_

Ans 6/31

題解

$$\sum_{x=1}^4 f(x) = \frac{a}{1!} + \frac{4a}{2!} + \frac{9a}{3!} + \frac{16a}{4!} = \frac{31a}{6} = 1 \Rightarrow a = \frac{6}{31}$$

22. 有一個隨機變數X，其機率分配如下：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x^2}{31x!} & x = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{其它值} \end{cases}$$

則  $P(X > 1) =$ \_\_\_\_\_和  $P(X > 1 | X < 4) =$ \_\_\_\_\_

又  $E(x) =$ \_\_\_\_\_  $\text{Var}(x) =$ \_\_\_\_\_

Ans: 25/31, 7/9, 2.355, 7.194

題解

$$(2) \quad P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 1) = 1 - \frac{6}{31} = \frac{25}{31}$$

$$P(X > 1 | X < 4) = \frac{P(X > 1, X < 4)}{P(X < 4)} = \frac{P(X = 2) + P(X = 3)}{1 - P(X = 4)} = \frac{12/31 + 9/31}{1 - 4/31} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$$

$$(3) \quad E(X) = \sum_{x=1}^4 xf(x) = \frac{6}{31} + \frac{2 \times 12}{31} + \frac{3 \times 9}{31} + \frac{4 \times 4}{31} = \frac{73}{31} = 2.355$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^4 x^2 f(x) = \frac{1 \times 6}{31} + \frac{4 \times 12}{31} + \frac{9 \times 9}{31} + \frac{16 \times 4}{31} = \frac{223}{31} = 7.194$$

23. 有一個隨機變數X，其機率分配如下：

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} a(1 + x^2) & x = -1, 0, 1, 2 \\ 0 & \text{其它值} \end{cases}$$

則常數a等於\_\_\_\_\_

Ans 0.11

題解

$$(1) \quad \sum_{x=-1}^2 f(x) = 2a + a + 2a + 5a = 10a = 1 \Rightarrow a = 0.1$$

24. 有一個隨機變數X，其機率分配如下：

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} a(1+x^2) & x = -1, 0, 1, 2 \\ 0 & \text{其它值} \end{cases}$$

令隨機變數 $Y=2X^2+2$ ，則 $P(Y>2)=$ \_\_\_\_\_

又  $E(Y)=$ \_\_\_\_\_和 $\text{Var}(Y)=$ \_\_\_\_\_

Ans 0.9, 56.8, 10.56

**題解**

隨機變數 Y 的機率分配為：

|      |     |     |     |     |
|------|-----|-----|-----|-----|
| y    | 2   | 4   | 10  | 合計  |
| f(y) | 0.1 | 0.4 | 0.5 | 1.0 |

$$P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - P(Y = 2) = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$(3) \quad E(Y) = \sum_{y=1}^4 yf(y) = 0.2 + 1.6 + 5.0 = 6.8; \quad E(Y^2) = \sum_y y^2 f(y) = 0.4 + 6.4 + 50 = 56.8$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 56.8 - (6.8)^2 = 56.8 - 46.24 = 10.56$$

25. 一盒內有 5個紅球及5個藍球，自其中任取2球。若2球是相同顏色，則得10元；若2球不是相同顏色，則得-8 元(即，輸8元)，令隨機變數X為某一次賭局中所贏得之金額；

(1) 則隨機變數X的機率分配=\_\_\_\_\_。

(2) 隨機變數X的平均數=\_\_\_\_\_及變異數=\_\_\_\_\_。

**Ans:** $f(-8)=4/9, f(10)=5/9; 2 : 80$

**題解：**

$$(1) \quad P(\text{兩球同色}) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{0}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{5}{0}\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{4}{9} \quad \text{和} \quad P(\text{兩球不同色}) = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{5}{9}$$

X 的機率分配為：

|      |     |     |     |
|------|-----|-----|-----|
| x    | -8  | 10  | 合計  |
| f(x) | 4/9 | 5/9 | 1.0 |

$$(2) \quad E(X) = \sum_x xf(x) = -8 \times \frac{4}{9} + 10 \times \frac{5}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) = (-8)^2 \times \frac{4}{9} + 10^2 \times \frac{5}{9} = \frac{756}{9} = 84$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 84 - (2)^2 = 80$$

26. 假如你投資\$2萬元於某風險很高的創投基金，有40%的機會可以拿回\$5萬元；有25%的機會可以將投資的錢拿回來，有35%的機會一毛錢都拿不回來。令隨機變數X為你可能的淨回收(net payoff)，

(1) 隨機變數 X 的平均數=\_\_\_\_\_與變異數=\_\_\_\_\_。

(2) 若你改變心意，想加碼投資到\$10 萬元，則你可能的淨回收(net payoff)的平均數=\_\_\_\_\_與變異數=\_\_\_\_\_。

**Ans: 0.5, 4.75, 2.5, 118.75**

**題解：**

(1) X 的機率分配為：

|           |     |      |      |     |
|-----------|-----|------|------|-----|
| 淨回收 x(萬元) | 3   | 0    | -2   | 合計  |
| f(x)      | 0.4 | 0.25 | 0.35 | 1.0 |

$$E(X) = \sum_x x f(x) = 3 \times 0.4 + 0 \times 0.25 + (-2) \times 0.35 = 0.5$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) = (3)^2 \times 0.4 + 0^2 \times 0.25 + (-2)^2 \times 0.35 = 5$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 5 - (0.5)^2 = 4.75$$

(2) 令Y=5X, E(Y)=5×0.5=2.5, Var(Y)=25×4.75=118.75。

27. 設10 個小孩的家庭中，男生之機率為0.3，則：

(1) 此家庭中恰有 2 位男生之機率=\_\_\_\_\_

(2) 此家庭中至少有 2 位男生之機率=\_\_\_\_\_

**Ans: 0.2335, 0.8507**

**題解：**

$$(1) X \sim N(10, 0.3), P(X = 2) = \binom{10}{2} 0.3^2 \times 0.7^8 = 0.2335$$

$$(1) X \sim N(10, 0.3), P(X \geq 2) = \sum_{x=2}^{10} \binom{10}{x} 0.3^x \times 0.7^{10-x} = 0.8507$$

28. 有25%的學生在某一特定必修科目中會被當掉，現有20個學生修課，令隨機變數X代表被當掉的學生人數：則

(1) 隨機變數X的平均數=\_\_\_\_\_及變異數=\_\_\_\_\_；

(2) P(X=0)=\_\_\_\_\_和P(X≥2)=\_\_\_\_\_。

**Ans: 5, 3.75, 0.0032, 0.9757**

**題解：** (1)  $X \sim B(20, 0.25), f(x) = \binom{20}{x} 0.25^x \times 0.75^{20-x}, x = 0, 1, \dots, 20$

$$E(X) = np = 20 \times 0.25 = 5 \text{ 和 } \text{Var}(X) = npq = 20 \times 0.25 \times 0.75 = 3.75$$

$$(2) P(X = 0) = \binom{20}{0} 0.25^0 \times 0.75^{20} = 0.0032$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.0032 - 0.0211 = 0.9757$$

29. 某一考試有10題選擇題，每一題均有4個可能答案，而每一題都只有一個是正確的。若某學生純粹以猜答案的方式來答題，今隨機變數Y代表此學生猜對的題數。則

(1) 隨機變數Y的機率分配為\_\_\_\_\_。

(2) 隨機變數Y的平均數=\_\_\_\_\_及變異數=\_\_\_\_\_。

(3)  $P(Y \geq 3) =$ \_\_\_\_\_。

**Ans: B(10,1/4), 2.5, 15/8, 0.4744**

**題解:** (1)  $Y \sim B(10, 1/4)$ ,  $y = 0, 1, 2, \dots, 10$

(2)  $E(Y) = np = 10 \times 1/4 = 2.5$  和  $Var(Y) = npq = 10 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 15/8$

(3)  $P(Y \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - 0.5256 = 0.4744$

30. 若有一個非正常硬幣，出現反面的機率為出現正面的三倍，擲這個非正常硬幣10次，令隨機變數X代表出現反面的次數，則：

(1) 隨機變數X的平均數=\_\_\_\_\_及變異數=\_\_\_\_\_。

(2)  $P(2 < X \leq 4) =$ \_\_\_\_\_和 $P(X > 1) =$ \_\_\_\_\_。

**Ans: 2.5, 1.875, 0.3963, 0.756**

**題解:** (1)  $X \sim B(10, 0.25)$ ,  $f(x) = \binom{10}{x} 0.25^x \times 0.75^{10-x}$ ,  $x = 0, 1, \dots, 10$

(2)  $E(X) = np = 10 \times 0.25 = 2.5$  和  $Var(X) = npq = 10 \times 0.25 \times 0.75 = 1.875$

(3)  $P(2 < X \leq 4) = P(X = 3) + P(X = 4)$

$$= \binom{10}{3} 0.25^3 \times 0.75^7 + \binom{10}{4} 0.25^4 \times 0.75^6 = 0.2503 + 0.1460 = 0.3963$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.0563 - 0.1877 = 0.756$$

31. 一盒中置有黑球5個、紅球4個，自其中連續抽取4球，令隨機變數X代表抽出黑球的個數，試求：

(1)  $P(3 \leq X \leq 5) =$ \_\_\_\_\_和  $P(X \geq 2) =$ \_\_\_\_\_

(2)  $E(x) =$ \_\_\_\_\_和 $Var(X) =$ \_\_\_\_\_

**Ans: 0.357, 0.753, 2.222, 0.617**

**題解:** 隨機變數 X 為在一個裝有 9 個球的盒子中取出 4 個球來檢查，其中黑球的個數， $X \sim H(N=9, S=5, n=4)$ 。

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{5}{x} \binom{4}{4-x}}{\binom{9}{4}}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$(2) P(3 \leq X \leq 5) = P(X=3) + P(X=4) = \frac{\binom{5}{3}\binom{4}{1}}{\binom{9}{4}} + \frac{\binom{5}{4}\binom{4}{0}}{\binom{9}{4}} = 0.317 + 0.040 = 0.357$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{4}{4}}{\binom{9}{4}} - \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{3}}{\binom{9}{4}} = 1 - 0.008 - 0.159 = 0.753$$

$$(3) E(X) = np = 4 \times \frac{5}{9} = 2.222 \text{ 和 } \text{Var}(X) = npq \times \frac{N-n}{N-1} = 4 \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{9-4}{9-1} = 0.617$$

32. 某公司在電子產品運出之前對所製造的產品進行可用性測試，並以二階段進行其計劃。裝有25個電子產品的盒子準備運送時，每盒取2個產品來做不良品試驗。如果找到任何不良品，則整盒送回廠內進行100%的篩選。如果沒有找到任何不良品，則此盒就運出。

(1) 裝有3個瑕疵品的盒子被運出的機率=\_\_\_\_\_

(2) 只有1個瑕疵品的盒子卻回廠做100%篩選的機率=\_\_\_\_\_

**Ans: 0.77, 0.08**

**題解:** 令隨機變數  $X$  代表在一個裝有 25 個產品的盒子中取出 2 個產品來檢查，其中不良品的個數， $X \sim H(N=25, S, n=2)$ 。

(1) 在  $S=3$ (盒裝有 3 個不良品)中，盒子被運出的機率為：

$$P(X=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{22}{2}}{\binom{25}{2}} = 0.77$$

(2) 在  $S=1$ (盒裝有 1 個不良品)中，盒子被送回廠的機率為：

$$P(X=1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{24}{1}}{\binom{25}{2}} = 0.08$$

33. 一個袋子裝有24張彩卷，其中有5張有獎，由袋子中隨機抽出5張，隨機變數 $X$ 代表有獎彩卷之張數，則：

$E(X)$ =\_\_\_\_\_,  $\text{Var}(X)$ =\_\_\_\_\_ ;  $P(X \geq 1)$ =? \_\_\_\_\_

**Ans: 1.25, 0.74, 0.8063**

**題解:** 隨機變數  $X$  服從一個超幾何分配： $P(X=x) = \frac{\binom{5}{x}\binom{15}{5-x}}{\binom{20}{5}}$ ;  $x=0,1,2,3,4,5$

$$(2) \quad E(X) = np = 5 \times \frac{5}{20} = 1.25 \quad \text{和} \quad \text{Var}(X) = npq \times \frac{N-n}{N-1} = 5 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{20-5}{20-1} = 0.74$$

$$(3) \quad P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{5}{0} \times \binom{15}{5}}{\binom{20}{5}} = 0.8063$$

34. 假定每天在大千路與萬全路之交叉路口發生的車禍件數符合Poisson分配，而且每天平均有2次車禍發生。問某天在此交叉路口：

(1) 至多只會發生一次車禍的機率=\_\_\_\_\_？

(2) 不會有車禍發生的機率=\_\_\_\_\_？

(3) 至少有3件車禍會發生的機率=\_\_\_\_\_？

**Ans: 0.406, 0.1353, 0.3223**

**題解：**令隨機變數  $X$  代表某天在此交叉路口發生的車禍件數， $x=0,1,2,\dots$ ；  
 $X \sim P(\lambda=2)$ 。

$$(1) \quad P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{e^{-2} \times 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} \times 2^1}{1!} = 0.406$$

$$(2) \quad P(X = 0) = \frac{e^{-2} \times 2^0}{0!} = 0.1353$$

$$(3) \quad P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.6777 = 0.3223$$

35. H牌汽車業者關心Q-PLUS車型煞車系統的一種故障。此故障發生率不高，但在高速行駛時會引起嚴重的事故。假定每年有過此故障的汽車數目  $X$  為一個  $\lambda=4$  的卜瓦松機率分配：

(1) 每年最多3輛汽車造成嚴重事故的機率=\_\_\_\_\_

(2) 每年超過2輛汽車會造成嚴重事故的機率=\_\_\_\_\_

(3)  $E(X)$ =\_\_\_\_\_ 和  $\text{Var}(X)$ =\_\_\_\_\_ 各為何？

**Ans: 0.433, 0.762, 4, 4**

**題解：**(1)  $X \sim P(\lambda=4)$ ;  $P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^3 \frac{e^{-4} \times 4^x}{x!} = e^{-4} \times \left( \frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} \right) = e^{-4} \times \frac{142}{6} = 0.433$

$$(2) \quad P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{x=0}^2 \frac{e^{-4} \times 4^x}{x!} = 1 - 0.238 = 0.762$$

$$(3) \quad E(X) = \lambda = 4, \quad \text{Var}(X) = \lambda = 4$$

36. 已知一個池塘中的一種泰國蝦有2%的蝦有病，假設病蝦在池水中呈隨機分布，則在一網含有100隻蝦中剛好有2隻病蝦的機率是多少？

(1) 用二項分布 (Binomial Distribution) 解所問的機率=\_\_\_\_\_。

(2) 用卜瓦松分布 (Poisson Distribution) 解所問的機率=\_\_\_\_\_。

(註：0.9998 = 0.37346428；e = 2.71828)

**Ans： 0.1823, 0.1804**

**題解：**

$$(1) Y \sim B(100, 0.02), \quad y = 0, 1, 2, \dots, 100; \quad P(Y = 2) = \binom{100}{2} 0.02^2 \times 0.98^{98} = 0.1823$$

$$(2) Y \approx P(\lambda = 2), \quad y = 0, 1, 2, \dots; \quad P(Y = 3) = \frac{e^{-2} \times 2^3}{3!} = 0.1804$$

## 間斷型機率分配(解答)

### (一)、選擇題：

|    |   |    |   |    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|
| 1  | C | 2  | D | 3  | B | 4  | B | 5  | B |
| 6  | C | 7  | A | 8  | D | 9  | C | 10 | B |
| 11 | A | 12 | B | 13 | B | 14 | D | 15 | C |
| 16 | D | 17 | A | 18 | C |    | A |    | A |

**21. (題解)：**

$$(1) \sum_{x=1}^4 f(x) = \frac{a}{1!} + \frac{4a}{2!} + \frac{9a}{3!} + \frac{16a}{4!} = \frac{31a}{6} = 1 \Rightarrow a = \frac{6}{31}$$

**22. (題解)：**

$$(2) P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 1) = 1 - \frac{6}{31} = \frac{25}{31}$$

$$P(X > 1 | X < 4) = \frac{P(X > 1, X < 4)}{P(X < 4)} = \frac{P(X = 2) + P(X = 3)}{1 - P(X = 4)} = \frac{12/31 + 9/31}{1 - 4/31} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$$

$$(3) E(X) = \sum_{x=1}^4 x f(x) = \frac{6}{31} + \frac{2 \times 12}{31} + \frac{3 \times 9}{31} + \frac{4 \times 4}{31} = \frac{73}{31} = 2.355$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^4 x^2 f(x) = \frac{1 \times 6}{31} + \frac{4 \times 12}{31} + \frac{9 \times 9}{31} + \frac{16 \times 4}{31} = \frac{223}{31} = 7.194$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 7.194 - (2.355)^2 = 7.194 - 5.546 = 1.648$$

**23. (題解)：**

$$(1) \sum_{x=1}^4 f(x) = 2a + a + 2a + 5a = 10a = 1 \Rightarrow a = 0.1$$

24.( 題解) :

(2) 隨機變數 Y 的機率分配為 :

|      |     |     |     |     |
|------|-----|-----|-----|-----|
| y    | 2   | 4   | 10  | 合計  |
| f(y) | 0.1 | 0.4 | 0.5 | 1.0 |

$$P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - P(Y = 2) = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$(3) E(Y) = \sum_{y=1}^4 yf(y) = 0.2 + 1.6 + 5.0 = 6.8 ; E(Y^2) = \sum_y y^2 f(y) = 0.4 + 6.4 + 50 = 56.8$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 56.8 - (6.8)^2 = 56.8 - 46.24 = 10.56$$

25.( 題解) :

$$(1) P(\text{兩球同色}) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{0}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{5}{0}\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{4}{9} \text{ 和 } P(\text{兩球不同色}) = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{5}{9}$$

X 的機率分配為 :

|      |     |     |     |
|------|-----|-----|-----|
| x    | -8  | 10  | 合計  |
| f(x) | 4/9 | 5/9 | 1.0 |

$$(2) E(X) = \sum_x xf(x) = -8 \times \frac{4}{9} + 10 \times \frac{5}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) = (-8)^2 \times \frac{4}{9} + 10^2 \times \frac{5}{9} = \frac{756}{9} = 84$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 84 - (2)^2 = 80$$

26.( 題解) :

(1) X 的機率分配為 :

|           |     |      |      |     |
|-----------|-----|------|------|-----|
| 淨回收 x(萬元) | 3   | 0    | -2   | 合計  |
| f(x)      | 0.4 | 0.25 | 0.35 | 1.0 |

$$E(X) = \sum_x xf(x) = 3 \times 0.4 + 0 \times 0.25 + (-2) \times 0.35 = 0.5$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) = (3)^2 \times 0.4 + 0^2 \times 0.25 + (-2)^2 \times 0.35 = 5$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 5 - (0.5)^2 = 4.75$$

$$(3) \text{ 令 } Y = 5X, E(Y) = 5 \times 0.5 = 2.5, Var(Y) = 25 \times 4.75 = 118.75。$$

27.( 題解) :

$$(1) X \sim N(10, 0.3), P(X = 2) = \binom{10}{2} 0.3^2 \times 0.7^8 = 0.2335$$

$$(1) X \sim N(10, 0.3), P(X \geq 2) = \sum_{x=2}^{10} \binom{10}{x} 0.3^x \times 0.7^{10-x} = 0.8507$$



28.( 題解) :

$$(1) X \sim B(20, 0.25), f(x) = \binom{20}{x} 0.25^x \times 0.75^{20-x}, \quad x = 0, 1, \dots, 20$$

$$E(X) = np = 20 \times 0.25 = 5 \quad \text{和} \quad \text{Var}(X) = npq = 20 \times 0.25 \times 0.75 = 3.75$$

$$(2) P(X = 0) = \binom{20}{0} 0.25^0 \times 0.75^{20} = 0.0032$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.0032 - 0.0211 = 0.9757$$

29.( 題解) :

$$(1) Y \sim B(10, 1/4), \quad y = 0, 1, 2, \dots, 10$$

$$(2) E(Y) = np = 10 \times 1/4 = 2.5 \quad \text{和} \quad \text{Var}(Y) = npq = 10 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 15/8$$

$$(3) P(Y \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - 0.5256 = 0.4744$$

30.( 題解) :

$$(1) X \sim B(10, 0.25), f(x) = \binom{10}{x} 0.25^x \times 0.75^{10-x}, \quad x = 0, 1, \dots, 10$$

$$(2) E(X) = np = 10 \times 0.25 = 2.5 \quad \text{和} \quad \text{Var}(X) = npq = 10 \times 0.25 \times 0.75 = 1.875$$

$$(3) P(2 < X \leq 4) = P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= \binom{10}{3} 0.25^3 \times 0.75^7 + \binom{10}{4} 0.25^4 \times 0.75^6 = 0.2503 + 0.1460 = 0.3963$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.0563 - 0.1877 = 0.756$$

31.( 題解) :

(1) 隨機變數  $X$  為在一個裝有 9 個球的盒子中取出 4 個球來檢查，其中黑球的個數， $X \sim H(N=9, S=5, n=4)$ 。

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{5}{x} \binom{4}{4-x}}{\binom{9}{4}}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$(2) P(3 \leq X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{\binom{5}{3} \binom{4}{1}}{\binom{9}{4}} + \frac{\binom{5}{4} \binom{4}{0}}{\binom{9}{4}} = 0.317 + 0.040 = 0.357$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{\binom{5}{0} \binom{4}{4}}{\binom{9}{4}} - \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{3}}{\binom{9}{4}} = 1 - 0.008 - 0.159 = 0.753$$

$$(3) \quad E(X) = np = 4 \times \frac{5}{9} = 2.222 \quad \text{和} \quad \text{Var}(X) = npq \times \frac{N-n}{N-1} = 4 \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{9-4}{9-1} = 0.617$$

32.( 題解) :

令隨機變數  $X$  代表在一個裝有 25 個產品的盒子中取出 2 個產品來檢查，其中不良品的個數， $X \sim H(N=25, S, n=2)$ 。

(3) 在  $S=3$ (盒裝有 3 個不良品)中，盒子被運出的機率為：

$$P(X=0) = \frac{\binom{3}{0} \binom{22}{2}}{\binom{25}{2}} = 0.77$$

(4) 在  $S=1$ (盒裝有 1 個不良品)中，盒子被送回廠的機率為：

$$P(X=1) = \frac{\binom{1}{1} \binom{24}{1}}{\binom{25}{2}} = 0.08$$

33.( 題解) :

(1) 隨機變數  $X$  服從一個超幾何分配：
$$P(X=x) = \frac{\binom{5}{x} \binom{15}{5-x}}{\binom{20}{5}}; \quad x=0,1,2,3,4,5$$

$$(2) \quad E(X) = np = 5 \times \frac{5}{20} = 1.25 \quad \text{和} \quad \text{Var}(X) = npq \times \frac{N-n}{N-1} = 5 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{20-5}{20-1} = 0.74$$

$$(3) \quad P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\binom{5}{0} \times \binom{15}{5}}{\binom{20}{5}} = 0.8063$$

34.( 題解) :

令隨機變數  $X$  代表某天在此交叉路口發生的車禍件數， $x=0,1,2,\dots$ ； $X \sim P(\lambda=2)$ 。

$$(1) \quad P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = e^{-2} \times \frac{2^0}{0!} + e^{-2} \times \frac{2^1}{1!} = 0.406$$

$$(2) \quad P(X=0) = e^{-2} \times \frac{2^0}{0!} = 0.1353$$

$$(3) \quad P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.6777 = 0.3223$$

35.( 題解) :

$$(1) \quad X \sim P(\lambda=4); \quad P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^3 \frac{e^{-4} \times 4^x}{x!} = e^{-4} \times \left( \frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} \right) = e^{-4} \times \frac{142}{6} = 0.433$$

$$(2) \quad P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{x=0}^2 \frac{e^{-4} \times 4^x}{x!} = 1 - 0.238 = 0.762$$

$$(3) \quad E(X) = \lambda = 4, \quad \text{Var}(X) = \lambda = 4$$

36.( 題解)：

$$(1) Y \sim B(100, 0.02), \quad y = 0, 1, 2, \dots, 100; \quad P(Y = 2) = \binom{100}{2} 0.02^2 \times 0.98^{98} = 0.1823$$

$$(2) Y \approx P(\lambda = 2), \quad y = 0, 1, 2, \dots; \quad P(Y = 3) = \frac{e^{-2} \times 2^3}{3!} = 0.1804$$

## 連續型隨機變數

### 一、選擇題：

- 給定一連續隨機變數下，其機率密度函數下的面積為：  
(A) 等於此連續隨機變數的平均數 (B) 依不同機率密度函數而定  
(C) 等於 1.00 (D) 不能判斷
- 兩次地震間隔時間的隨機變數，最適合下列何種分配？  
(A) 常態分配 (B) 指數分配 (C) 二項分配 (D) 幾何分配
- 某電腦執行程式的時間（以秒計）為一連續隨機變數，其機率密度函數如下：  
$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$
  
其執行程式時間(X)的期望值與變異數為：  
(A) 3.62；16.67 (B) 5.00；8.33 (C) 7.5；33.33 (D) 9.31；108.33
- 下列對常態分配的敘述，何者為錯誤？  
(A) 對稱的分配 (B) 單峰 (unimodal) 的分配  
(C) 有相同的平均數與標準差 (D) 在機率密度函數下的面積永遠等於 1.00
- 標準常態分配與常態分配差異之處為何？  
(A) 標準常態分配為對稱於零的分配，然而常態分配卻不一定對稱於零  
(B) 標準常態分配的標準差為 0，而常態分配的標準差永遠大於 0  
(C) 標準常態分配是間斷型分配，而常態分配為連續型分配  
(D) 標準常態分配在密度函數下的面積永遠等於 1.00，而常態分配在密度函數下的面積永遠大於 1.00
- 在一個常態分配中，觀測值落在平均數左右一個標準差範圍所佔的機率約為何？  
(A) 95.45% (B) 25.25% (C) 99.73% (D) 68.27%
- 標準化常態分配之標準差為何？  
(A) 0.5 (B) 1 (C) 1.5 (D) 2

8. 下列何者為真：
- (A) 常態分布的算術平均值在眾量的右邊 (B) 偏斜分布的中位數與眾數在同一位置
- (C) 自由度為 1 時，卡方分布近似常態分布
- (D)  $Z = (x - \mu) / \sigma$  是標準化常態分布轉換公式
9. 設  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  (亦即隨機變數  $X$  服從一個常態分配，平均數  $\mu$ ，變異數  $\sigma^2$ )，若  $aX + b$  具標準常態分布，則下述何者正確？
- (A)  $a = 1/\sigma$ ； $b = -\mu/\sigma$  (B)  $a = 1/\sigma^2$ ， $b = -\mu/\sigma^2$
- (C)  $a = -\mu/\sigma$ ， $b = -\mu$  (D)  $a = -\mu/\sigma^2$ ， $b = -\mu$
10. 設標準常態分配下，95 百分位數落於標準化值  $Z = ?$
- (A) 1.645 (B) 1.96 (C) 2.054 (D) 2.326
11. 隨機抽出 200 位某高中一年級新生，其身高（單位公分）資料的部分敘述性統計如下：樣本平均數 = 164.24，樣本中位數 = 165.00，樣本標準差 = 9.72，假設這些身高資料服從常態。請問身高 179 公分以上的同學應該有多少人？（解答請四捨五入到整數）
- (A) 11 (B) 13 (C) 15 (D) 17
12. 隨機抽出 200 位某高中一年級新生，其身高（單位公分）資料的部分敘述性統計如下：樣本平均數 = 164.24，樣本中位數 = 165.00，樣本標準差 = 9.72，假設這些身高資料服從常態。請問最矮的 10 個人身高應該在多少公分以下？
- (A) 148 (B) 150 (C) 152 (D) 154
13. 假設滅火器壽命是常態分布  $N(3, 1)$ ，單位是年。則一滅火器在放置五整年之後還有作用的機率是：
- (A) 0.023 (B) 0.046 (C) 0.159 (D) 0.318
14. 假設滅火器壽命是常態分布  $N(3, 1)$ ，單位是年，若二支滅火器放置五整年之後，至少有一支有作用的機率約是：
- (A) 0.29 (B) 0.090 (C) 0.045 (D) 0.54
15. 某一跨國商務公司在招考員工時，必須先考初試（滿分為 200 分之性向測驗），再以其分數高低決定面試與否。過去經驗顯示測驗分數為常態分配。假設今年公司預定錄取分數最好的 30 人面試，而報考人數有 150 人，計算其平均成績為 120 分和標準差分數為 15 分。該公司面試前錄取分數會：
- (A) 比 129 分高 (B) 比 132 分高 (C) 比 135 分高 (D) 比 138 分高
16. 設隨機變數  $X$  服從一個二項分配  $B(n, p)$ ，請問在什麼條件下最適合利用常態分配求其二項機率的近似值？
- (A)  $n \geq 30$  (B)  $np > 5$  (C)  $n(1-p) > 5$  (D)  $np > 5$  且  $n(1-p) > 5$
17. 若某校學生之經濟學分數為常態分配，該校學生經濟學平均分數為 68 分，標準差為 8，若 70 分以上為 B，而 B 以上成績的學生有 120 人，則該校修習生物統計

- 學之學生共約多少人？  
 (A) 320 人 (B) 300 人 (C) 480 人 (D) 600 人
18. 青山農場所出產的蘋果的重量分配布是  $N(\mu, \sigma^2)$ ， $\mu = 300$  (公克)， $\sigma = 10$  (公克)，現在36 粒裝一箱，設其總重量是X公克，則X 在 $10800 \pm 720$  公克之間的機率最接近的數字是：  
 (A) 0.9018 (B) 0.9306 (C) 0.9544 (D) 0.9974
19. 假設隨機變數X 的分配為二項分配  $B(25, 0.5)$ ，若要計算 $P(10 < X \leq 15)$ 的機率，我們採取常態分配逼近，而且使用連續性修正 (continuity correction)，下列何者正確？  
 (A)  $\Phi(1.2) - \Phi(-0.8)$  (B)  $\Phi(1.0) - \Phi(-1.0)$   
 (C)  $\Phi(0.12) - \Phi(-0.08)$  (D)  $\Phi(0.10) - \Phi(-0.10)$
20. 某加油站的洗車服務包括機器自動沖洗和人工擦乾兩階段。若此兩階段的服務時間皆服從常態分配且彼此互相獨立，其平均數分別為10, 8 分鐘，標準差分別為4, 3 分鐘，則洗一部車費時超過 23 分鐘的機率為何？  
 (A) 0.3413 (B) 0.1587 (C) 0.4706 (D) 0.02
21. 設隨機變數X代表為某商品之售價服從一個常態分配，平均數為30，變異數為5，設隨機變數Y代表此商品的進貨成本，也是一個常態分配，平均數為25，變異數為4，若可假設售價與成本互為獨立，則不虧本 (即為 $X - Y > 0$ ) 之機率為何？  
 (A) 0.0475 (B) 0.9525 (C) 0.1587 (D) 0.8413
22. 設 $X_1, X_2$  是互相獨立的隨機變數,且其分配分別是  $N(1, 3)$  和  $N(3, 4)$  (亦即 $X_1$  是常態分配，期望值為1，變異數為3， $X_2$  具常態分配，期望值為3，變異數為4)。令 $Y = 4X_1 - 2X_2$ 。則下列敘述何者正確？① $E(Y) = 2$ ，② $E(Y) = 0$ ，③ $V(Y) = 4$ ，④ $V(Y) = 32$ ，其中 $E(\cdot)$ 表示期望值， $V(\cdot)$ 表示變異數  
 (A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) 四者皆錯
23. 設某大學有一萬名男學生，其身高分布是常態 $N(170, 100)$ ，單位是公分，若超過190 公分是高個子，則高個子人數最接近的數字是：  
 (A) 500 人 (B) 250 人 (C) 223 人 (D) 25 人
24. 企管系二年級共有100 個學生，若統計學成績分布呈常態分配，且平均分數為70 分，標準差為10 分，則約略有幾個人的成績在60 分以下？(根據 $P(|Z| > 2) \doteq 5\%$ ， $P(|Z| > 1) \doteq 32\%$ ，其中Z 為「標準常態分配」)。  
 (A) 16 人 (B) 32 人 (C) 84 人 (D) 90 人
25. 若Z是一個標準常態隨機變數，則 $P(-1 < Z < 0)$ 將會比 $P(1.5 < Z < 2.5)$ ：  
 (A) 相等 (B) 大 (C) 小 (D) 以上都不正確

## 二、計算題：

26.  $X$  為一隨機變數，服從均勻分配(Uniform distribution)，其機率密度函數如下，

$$f(x) = \begin{cases} 1/20 & 20 \leq x \leq 40 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 則 $X$ 之平均數=\_\_\_\_\_與變異數=\_\_\_\_\_。

(2)  $P(25 < X < 32)$  = \_\_\_\_\_

Ans : 30 , 100/3 , 0.35

題解

$$E(X) = \mu = \int_{20}^{40} \frac{x}{20} dx = \frac{x^2}{40} \Big|_{20}^{40} = 40 - 10 = 30$$

$$E(X^2) = \int_{20}^{40} \frac{x^2}{20} dx = \frac{x^3}{60} \Big|_{20}^{40} = \frac{2800}{3}; \quad V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{2800}{3} - 900 = \frac{100}{3}$$

$$(2) \quad P(25 < X < 32) = \int_{25}^{32} \frac{1}{20} dx = \frac{x}{20} \Big|_{25}^{32} = \frac{7}{20} = 0.35$$

27. 製成後的型號A1012之螺母內徑是平均值5公分及標準差0.01公分的一個常態分配。

(1) 內徑超過 5.025 公分之螺母的機率=\_\_\_\_\_

(2) 活塞環內徑在 4.9883 公分和 5.01 公分之間的機率為何=\_\_\_\_\_

(3) 15%的活塞環其內徑會低於\_\_\_\_\_。

Ans : 0.0062 , 0.7203 , 4.9896

題解

(1)  $X \sim N(10, 0.03^2)$ ,

$$P(X > 10.075) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{10.075 - 10}{0.03}\right) = P(Z > 2.5) = 0.5 - 0.4938 = 0.0062$$

(2)  $P(9.965 < X < 10.03) = P\left(\frac{9.965 - 10}{0.03} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{10.03 - 10}{0.03}\right)$

$$= P(-1.17 < Z < 1) = P(-1.17 < Z < 0) + P(0 < Z < 1) = 0.3790 + 0.3413 = 0.7203$$

(3)  $X \sim N(5, 0.01^2)$ ,

$$P(X < a) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{a - 5}{0.01}\right) = P(Z < \frac{a - 5}{0.01}) = P(Z > -\frac{a - 5}{0.01}) = 0.5 - P(0 < Z < -\frac{a - 5}{0.01}) = 0.15$$

$$P(0 < Z < -\frac{a - 5}{0.01}) = 0.35; \text{ 因爲查表得 } P(0 < Z < 1.04) \approx 0.35; \text{ 所以 } -\frac{a - 5}{0.01} = 1.04 \Rightarrow a = 4.9896$$

28. 台灣年輕人喜歡紅色的手機的比例為20%，則在某一個手機直營店未來二個月所出售的800支手機中，試求下列機率：

(1) 介於 140 支到 170 支是紅色的手機(含兩端)的機率=\_\_\_\_\_

(2) 至少 180 支是紅色的手機的機率=\_\_\_\_\_

Ans : 0.767 , 0.0516

題解

(1)  $X \sim B(800, 0.2)$ , 但因  $np = 160 > 5$  且  $n(1-p) = 640 > 5$ , 所以, 可用常態分配近似二項分配。

$$X \approx N(160, 144)$$

$$P(140 \leq X \leq 170) \approx P(139.5 \leq X \leq 170.5)$$

$$= P\left(\frac{139.5-160}{12} \leq Z \leq \frac{170.5-160}{12}\right) = P(-1.71 \leq Z \leq 0.88) = 0.4564 + 0.3106 = 0.767$$

$$(2) P(X \geq 180) \approx P(X \geq 179.5) = P\left(Z \geq \frac{179.5-160}{12}\right) = P(Z \geq 1.63)$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.63) = 0.5 - 0.4484 = 0.0516$$

29. 若已知  $P(X > 116) = 0.0668$  和  $P(X < 114) = 0.8413$ , 且  $X$  服從一個常態分配  $N(\mu, \sigma^2)$ , 則

(1) 隨機變數  $X$  的平均數=\_\_\_\_\_和標準差=\_\_\_\_\_

(2)  $P(112 < X < 118)$ =\_\_\_\_\_ 和  $P(X < 103)$ =\_\_\_\_\_

Ans : 110 , 4 , 0.2857 , 0.0401

題解

(1)  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,

$$P(X < 114) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{114 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{114 - \mu}{\sigma}\right) = 0.8413$$

$$\text{查表得知: } P(Z < 1.0) = 0.8413 \Rightarrow \frac{114 - \mu}{\sigma} = 1.0 \Rightarrow \mu + \sigma = 114$$

$$P(X > 116) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{116 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{116 - \mu}{\sigma}\right) = 0.0668$$

$$\text{查表得知: } P(Z > 1.5) = 0.0668 \Rightarrow \frac{116 - \mu}{\sigma} = 1.5 \Rightarrow \mu + 1.5\sigma = 116$$

$$\text{解聯立方程式} \Rightarrow \mu = 110, \sigma = 4.0$$

$$(2) P(112 < X < 118) = P\left(\frac{112-110}{4} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{118-110}{4}\right)$$

$$= P(0.5 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < 0.5) = 0.9772 - 0.6915 = 0.2857$$

$$P(X < 103) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{103 - 110}{4}\right)$$

$$= P(Z < -1.75) = P(Z > 1.75) = 1 - P(Z < 1.75) = 1 - 0.9599 = 0.0401$$

30. 青山農場生產蘋果, 其重量為一常態分配, 平均數為560公克, 標準差為20公克, 試求下列各小題:

(1) 某一個水梨重量大於 580 公克的機率=\_\_\_\_\_

(2) 抽取 5 個水梨, 恰有 3 個水梨重量大於 580 公克的機率=\_\_\_\_\_

(3) 抽取 5 個水梨, 至少有 2 個水梨重量大於 580 公克的機率=\_\_\_\_\_。

Ans : 0.01587 , 0.0283 , 0.181

題解

(1)  $X \sim N(560, 20^2)$ ,

$$P(X > 580) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{580 - 560}{20}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

(2) Y代表5個水梨中，其重量大於580公克的個數，所以  $Y \sim B(5, 0.1587)$ ；

$$P(Y = 3) = \binom{5}{3} 0.1587^3 \times 0.8413^2 = 0.0283$$

(3)  $P(Y \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0.4215 - 0.3975 = 0.181$

31. 已知大千企業所生產之AQ03零件，其長度符合常態分配，平均數為118公分，標準差為 3.2 公分。則

(1) 任取一個 AQ03 零件，其長度超過 122 公分之機率=\_\_\_\_\_。

(2) 任取四個 AQ03 零件，最多只有一個長度超過 120 公分之機率=\_\_\_\_\_。

Ans : 0.1056 , 0.9421

題解

(1)  $X \sim N(118, 3.2^2)$ ,  $P(X > 122) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{122 - 118}{3.2}\right) = P(Z > 1.25) = 0.1056$

(2) Y代表4個AQ03零件中，長度高於122公分的個數，所以  $Y \sim B(4, 0.1056)$ ；

$$P(Y \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.6399 + 0.3022 = 0.9421$$

32. 某一大廣告公司招考相關廣告設計人員時，初試為總分180分之『設計概念與創意』測驗，第二階段面試是以分數高低來決定試。假設『設計概念與創意』測驗分數為一個常態分配，且今年公司預定選分數最好的二十四人面試，而報考人數有150 人計算其平均成績為120 分和標準差分15 分。

(1) 該公司第二階段面試的最低分數為\_\_\_\_\_

(2) 若某位先生考試得 140 分時，估計他的分數至少名列第\_\_\_\_\_名

Ans : 134.92 , 14

題解

(1)  $X \sim N(120, 15^2)$ , 令a為第二階段面試最低分數

$$P(X > a) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{a - 120}{15}\right) = P(Z > \frac{a - 120}{15}) = 1 - P(Z < \frac{a - 120}{15}) = 24/150 = 0.16$$

$$P(Z < \frac{a - 120}{15}) = 0.84 ;$$

因為查表得  $P(Z < 0.9945) \approx 0.84$ ; 所以,  $\frac{a - 120}{15} = 0.9945 \Rightarrow a = 134.92(\text{分})$



$$(2) \quad P(X > 140) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{140 - 120}{15}\right) = P(Z > 1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$$

$150 \times 0.0918 = 13.77 \approx 14$ ，這位先生至少名列第14名。

33. 設某私立大學共有6000位學生，其學生之年齡服從一個常態分配  $N(20.8, 1.82)$ ，則：

(1) 年齡低於20歲之學生人數=\_\_\_\_\_

(2) 若全體學生中隨機抽問10位學生的年齡，正好有2位同學高於20歲的機率為\_\_\_\_\_

Ans : 0.33, 0.0547

$$(1) \quad X \sim N(20.8, 1.8^2), \quad P(X < 20) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{20 - 20.8}{1.8}\right) = P(Z < -0.44) = 0.33$$

(2) Y代表10個學生中，年齡高於20歲的人，所以  $Y \sim B(10, 0.67)$ ；

$$P(Y = 4) = \binom{10}{4} 0.67^4 \times 0.33^6 = 0.0547$$

34. 某醫院會計部門為了解病患應收帳款天數之情形，整理了所有病患應收帳款之天數資料，發現應收帳款天數呈現是一個常態分配  $N(20, 82)$ ，則：

(1) 帳款介於20天至40天之機率=\_\_\_\_\_

(2) 若醫院想寄給欠帳款最久的2.5%催繳信函，則欠\_\_\_\_\_天以上的病患將會收到信函？

(3)

Ans : 0.4938, 35.68

題解

$$(1) \quad X \sim N(20, 8^2), \quad P(20 < X < 40) = P\left(\frac{20 - 20}{8} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{40 - 20}{8}\right) = P(0 < Z < 2.5) = 0.4938$$

$$(2) \quad X \sim N(20, 8^2),$$

$$P(X > a) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{a - 20}{8}\right) = P(Z > \frac{a - 20}{8}) = 1 - P(Z < \frac{a - 20}{8}) = 0.025$$

$$P(Z < \frac{a - 20}{8}) = 0.975; \text{因爲查表得 } P(Z < 1.96) \approx 0.975; \text{ 所以, } \frac{a - 20}{8} = 1.96 \Rightarrow a = 35.68(\text{天})$$

35. 一產品之重量分配為常態分配  $N(200, 42)$ ，單位：公克。

- (1) 今客戶要求之規格為  $199 \pm 4$  公克，過重或過 6 輕均為不合格，試問在目前之機 6 器設備下，不合格的比例為\_\_\_\_\_
- (2) 若該產品的標準差仍維持 4 公克，欲使其重量超過 210 公克之機率等於 5%，則平均重量應訂為\_\_\_\_\_

Ans : 0.3323 , 203.42

題解

$$(1) \quad P(\text{不合格}) = P(X < 195) + P(X > 203) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{195 - 200}{4}\right) + P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{203 - 200}{4}\right) \\ = P(Z < -1.25) + P(Z > 0.75) = 0.1056 + 0.2267 = 0.3323$$

$$(2) \quad P(X > 210) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{210 - \mu}{4}\right) = P\left(Z > \frac{210 - \mu}{4}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{210 - \mu}{4}\right) = 0.05$$

$$P\left(Z < \frac{210 - \mu}{4}\right) = 0.95 ; \text{因爲查表得 } P(Z < 1.645) \approx 0.95 ;$$

$$\text{所以, } \frac{210 - \mu}{4} = 1.645 \Rightarrow \text{應設定平均重量在 } \mu = 203.42 (\text{公克})$$

## 連續型隨機變數(解答)

### 一、選擇題：

|    |   |    |   |    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|
| 1  | C | 2  | B | 3  | B | 4  | C | 5  | A |
| 6  | D | 7  | B | 8  | D | 9  | A | 10 | A |
| 11 | B | 12 | C | 13 | A | 14 | C | 15 | B |
| 16 | D | 17 | B | 18 | C | 19 | A | 20 | B |
| 21 | B | 22 | D | 23 | C | 24 | A | 25 | B |

### 二、計算題：

26.(解答)：

$$E(X) = \mu = \int_{20}^{40} \frac{x}{20} dx = \frac{x^2}{40} \Big|_{20}^{40} = 40 - 10 = 30$$

$$(1) \quad E(X^2) = \int_{20}^{40} \frac{x^2}{20} dx = \frac{x^3}{60} \Big|_{20}^{40} = \frac{2800}{3}; \quad V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{2800}{3} - 900 = \frac{100}{3}$$

$$(2) \quad P(25 < X < 32) = \int_{25}^{32} \frac{1}{20} dx = \frac{x}{20} \Big|_{25}^{32} = \frac{7}{20} = 0.35$$

27.(解答) :

(1)  $X \sim N(10, 0.03^2)$ ,

$$P(X > 10.075) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{10.075 - 10}{0.03}\right) = P(Z > 2.5) = 0.5 - 0.4938 = 0.0062$$

(2)  $P(9.965 < X < 10.03) = P\left(\frac{9.965 - 10}{0.03} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{10.03 - 10}{0.03}\right)$

$$= P(-1.17 < Z < 1) = P(-1.17 < Z < 0) + P(0 < Z < 1) = 0.3790 + 0.3413 = 0.7203$$

(3)  $X \sim N(5, 0.01^2)$ ,

$$P(X < a) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{a - 5}{0.01}\right) = P(Z < \frac{a - 5}{0.01}) = P(Z > -\frac{a - 5}{0.01}) = 0.5 - P(0 < Z < -\frac{a - 5}{0.01}) = 0.15$$

$$P(0 < Z < -\frac{a - 5}{0.01}) = 0.35; \text{因爲查表得 } P(0 < Z < 1.04) \approx 0.35; \text{所以, } -\frac{a - 5}{0.01} = 1.04 \Rightarrow a = 4.9896$$

28.(解答) :

(1)  $X \sim B(800, 0.2)$ , 但因  $np = 160 > 5$  且  $n(1 - p) = 640 > 5$ , 所以, 可用常態分配近似二項分配。

$$X \approx N(160, 144)$$

$$P(140 \leq X \leq 170) \approx P(139.5 \leq X \leq 170.5)$$

$$= P\left(\frac{139.5 - 160}{12} \leq Z \leq \frac{170.5 - 160}{12}\right) = P(-1.71 \leq Z \leq 0.88) = 0.4564 + 0.3106 = 0.767$$

(2)  $P(X \geq 180) \approx P(X \geq 179.5) = P(Z \geq \frac{179.5 - 160}{12}) = P(Z \geq 1.63)$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.63) = 0.5 - 0.4484 = 0.0516$$

29.(解答) :

(1)  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,

$$P(X < 114) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{114 - \mu}{\sigma}\right) = P(Z < \frac{114 - \mu}{\sigma}) = 0.8413$$

$$\text{查表得知: } P(Z < 1.0) = 0.8413 \Rightarrow \frac{114 - \mu}{\sigma} = 1.0 \Rightarrow \mu + \sigma = 114$$

$$P(X > 114) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{116 - \mu}{\sigma}\right) = P(Z > \frac{116 - \mu}{\sigma}) = 0.0668$$

$$\text{查表得知: } P(Z > 1.5) = 0.0668 \Rightarrow \frac{116 - \mu}{\sigma} = 1.5 \Rightarrow \mu + 1.5\sigma = 116$$

$$\text{解聯立方程式} \Rightarrow \mu = 110, \sigma = 4.0$$

(2)  $P(112 < X < 118) = P\left(\frac{112 - 110}{4} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{118 - 110}{4}\right)$

$$= P(0.5 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < 0.5) = 0.9772 - 0.6915 = 0.2857$$

$$P(X < 103) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{103 - 110}{4}\right)$$

$$= P(Z < -1.75) = P(Z > 1.75) = 1 - P(Z < 1.75) = 1 - 0.9599 = 0.0401$$

30.(解答) :

$$(1) X \sim N(560, 20^2),$$

$$P(X > 580) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{580 - 560}{20}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

(2) Y代表5個水梨中，其重量大於580公克的個數，所以  $Y \sim B(5, 0.1587)$ ；

$$P(Y = 3) = \binom{5}{3} 0.1587^3 \times 0.8413^2 = 0.0283$$

$$(3) P(Y \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0.4215 - 0.3975 = 0.181$$

**31.(解答)：**

$$(1) X \sim N(118, 3.2^2), P(X > 122) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{122 - 118}{3.2}\right) = P(Z > 1.25) = 0.1056$$

(2) Y代表4個AQ03零件中，長度高於122公分的個數，所以  $Y \sim B(4, 0.1056)$ ；

$$P(Y \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.6399 + 0.3022 = 0.9421$$

**32.(解答)：**

(1)  $X \sim N(120, 15^2)$ , 令a為第二階段面試最低分數

$$P(X > a) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{a - 120}{15}\right) = P(Z > \frac{a - 120}{15}) = 1 - P(Z < \frac{a - 120}{15}) = 24/150 = 0.16$$

$$P(Z < \frac{a - 120}{15}) = 0.84;$$

$$\text{因爲查表得 } P(Z < 0.9945) \approx 0.84; \text{ 所以, } \frac{a - 120}{15} = 0.9945 \Rightarrow a = 134.92(\text{分})$$

$$(2) P(X > 140) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{140 - 120}{15}\right) = P(Z > 1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$$

$$150 \times 0.0918 = 13.77 \approx 14, \text{ 這位先生至少名列第14名。}$$

**33.(解答)：**

$$(1) X \sim N(20.8, 1.8^2), P(X < 20) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{20 - 20.8}{1.8}\right) = P(Z < -0.44) = 0.33$$

(2) Y代表10個學生中，年齡高於20歲的人，所以  $Y \sim B(10, 0.67)$ ；

$$P(Y = 4) = \binom{10}{4} 0.67^4 \times 0.33^6 = 0.0547$$

**34.(解答)：**

$$(1) X \sim N(20, 8^2), P(20 < X < 40) = P\left(\frac{20 - 20}{8} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{40 - 20}{8}\right) = P(0 < Z < 2.5) = 0.4938$$

(2)  $X \sim N(20, 8^2)$ ,

$$P(X > a) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{a - 20}{8}\right) = P\left(Z > \frac{a - 20}{8}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{a - 20}{8}\right) = 0.025$$

$$P\left(Z < \frac{a - 20}{8}\right) = 0.975; \text{因爲查表得 } P(Z < 1.96) \approx 0.975; \text{所以, } \frac{a - 20}{8} = 1.96 \Rightarrow a = 35.68(\text{天})$$

35.(解答)：

$$\begin{aligned} (1) \quad P(\text{不合格}) &= P(X < 195) + P(X > 203) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{195 - 200}{4}\right) + P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{203 - 200}{4}\right) \\ &= P(Z < -1.25) + P(Z > 0.75) = 0.1056 + 0.2267 = 0.3323 \end{aligned}$$

$$(2) \quad P(X > 210) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{210 - \mu}{4}\right) = P\left(Z > \frac{210 - \mu}{4}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{210 - \mu}{4}\right) = 0.05$$

$$P\left(Z < \frac{210 - \mu}{4}\right) = 0.95; \text{因爲查表得 } P(Z < 1.645) \approx 0.95;$$

$$\text{所以, } \frac{210 - \mu}{4} = 1.645 \Rightarrow \text{應設定平均重量在 } \mu = 203.42(\text{公克})$$

## 抽樣分配

### (一)、選擇題：

- 抽樣分配係指下列何者的機率分配？  
(A) 樣本統計量      (B) 母體統計量      (C) 樣本參數      (D) 母體參數
- 統計學上的“參數”一詞，是指：  
(A) 樣本所計算的數量值      (B) 母體中某種未知特性值  
(C) 推論中引用的某種統計量      (D) 計算中所得的有效數量
- 統計學上的“統計量”一詞，概要而言是指？  
(A) 母體中的某種未知特性值      (B) 母體中的某些部分集合  
(C) 研究者所要探討的未知特徵數      (D) 由樣本所計算的數量
- 根據中央極限定理，樣本平均數的抽樣分配，在什麼情況下趨近於常態分配：  
(A) 母體平均數爲0      (B) 樣本平均數爲0

- (C) 母體變異數為1 (D) 趨近於常態分配的速度與樣本數大小有關
5. 在做抽樣調查時，試問下列何者是正確的敘述？：
- (A) 樣本大小與變異數大小成正比  
(B) 樣本大小與所能接受的誤差大小成正比  
(C) 樣本大小與所需之信心水準高低成反比  
(D) 樣本大小與母體大小成反比
6. 若說『普查優於抽樣調查』，試問下列何者是正確的敘述？
- (A) 普查所取得的資料都呈常態分配 (B) 普查可提供較正確的資訊  
(C) 普查可消除抽樣調查因對母體資訊不完整所產生的錯誤  
(D) 普查花費較少
7. 就統計學上的公正而言，下列何種抽樣方法較佳？
- (A) 非機率抽樣 (B) 簡單隨機抽樣 (C) 立意抽樣 (D) 配額抽樣
8. 若每一個可能的樣本被抽的機會相等，此抽樣方法稱為：
- (A) 簡單隨機抽樣 (B) 分層隨機抽樣 (C) 集體抽樣 (D) 系統抽樣
9. 一個母體含有100個個體，由1號編到100號，然後利用亂數表（Random number tables），選出一個介於1 到10 的號碼，例如8，然後抽出8，18，28，…，98 等10 個對應的母體個體，當作樣本，此種抽樣法為何種抽樣？
- (A) 單純隨機抽樣 (B) 分層隨機抽樣 (C) 叢式抽樣 (D) 系統抽樣
10. 台中市市政府的調查員從該市之132個里中，隨機抽出 5 個里，然後以這5個里的全部成年人作為調查對象。請問這位調查員是採用那種抽樣方法？
- (A) 集體抽樣 (B) 系統抽樣 (C) 簡單隨機抽樣 (D) 分層隨機抽樣
11. 下列敘述何者為正確？所謂“簡單隨機樣本”必須符合以下條件：①樣本中的觀察值必須符合常態分配的假設；② 樣本中的觀察值間必須是統計獨立；③樣本中的觀察值必須來自同一機率分配
- (A) ①② (B) ①③ (C) ②③ (D) ①②③
12. 設 $X_1, X_2, \dots, X_n$  為由母體平均數為 $\mu$ ，變異數 $\sigma^2$ 中，取出之隨機樣本，且 $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$ ，下列敘述何者不正確？
- (A) 樣本變異數 $S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)$ ，則 $E(S^2) = \sigma^2$
- (B) 令 $m_1 = (X_1 + X_2)/2$ 及 $m_2 = (X_1 + X_2 + X_3)/3$ ，則 $Var(m_1) < Var(m_2)$

- (C)  $X_1$ 可用來估計 $\mu$
- (D) 當 $n$  愈大時， $(\bar{X} - \mu)/n$ 愈接近標準常態分配
13. 假設樣本大小為100，樣本平均數16.5，母體標準差10，母體平均數15，選出檢定統計量之 $Z$  值：
- (A) 0.214            (B) -0.214            (C) 1.5            (D) -1.5
14. 從標準常態分配的母體中，隨機抽取一組樣本大小為 $n$ 的隨機樣本，令 $\bar{X}$ 表示樣本平均數，且 $P(\bar{X} \leq c) = 0.99$ ，試求 $c$  值？
- (A)  $1.96\sqrt{n}$             (B)  $1.96/\sqrt{n}$             (C)  $2.58\sqrt{n}$             (D)  $2.58/\sqrt{n}$
15. 設M牌手機的市場佔有率為12%。若隨機調查400位手機持有人，令 $\bar{p}$ 表此400 人中持用該廠牌手機的樣本比率。求 $\bar{p}$ 的抽樣誤差不超過3%的近似機率。
- (A) 0.8756            (B) 0.9052            (C) 0.9350            (D) 0.9690
16. 假設在上次的民意調查中得知，設立腳踏車專用道的贊成比率是62%。假設民意無改變，若現在重新隨機抽樣調查400 人，則在此400 人中贊成的比率在64.5%以上的機率，最接近數字是：
- (A) 0.1516            (B) 0.1389            (C) 0.1056            (D) 0.0782
17. 設 $X_1, X_2, \dots, X_n$  是 $N(\mu, \sigma^2)$ (常態分配)的一組隨機樣本(random sample)。若 $n=20$  時， $\bar{X}$ 的標準誤是2，則 $n$  是多少時，才會使 $\bar{X}$  的變異數為0.2？
- (A) 200            (B) 400            (C) 600            (D) 800
18. 大小分別為40與50之兩獨立樣本分別隨機抽自任兩個母體以檢定兩個母體均數差 $\mu_1 - \mu_2$ ，其樣本均數差 $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ 之抽樣分配為：
- (A) 常態分配            (B) 近似於常態分配
- (C) 自由度88之 $t$ 分配            (D) 自由度90之卡方分配(chi-square distribution)
19. 某公司所生產10公斤裝的洗衣粉，其標準差為0.4公斤，欲估計母體平均數，在95%信賴水準下並使估計誤差不超過0.08公斤，至少應抽多少包洗衣粉來秤重？
- (A) 62            (B) 75            (C) 97            (D) 116
20. 目前想要估計一養鴉場鴉隻之平均體重 $\mu$ 。假設養鴉場鴉隻體重具有標準差 $\sigma = 0.5$  公斤之常態分配。若要求具有95 %的信心使得所觀察之樣本平均體重 $\bar{X}$  與 $\mu$ 之距離小於0.12 公斤，則至少應抓取幾隻鴉出來稱重？(根據 $P(|Z| > 2) \approx 5\%$ ， $P(|Z| > 1) \approx 32\%$ ，其中 $Z$  具有「標準常態分配」)
- (A) 62            (B) 67            (C) 82            (D) 90

21. 某民調公司想了解民眾對於立法院通過『離島博奕法案』的支持度，採用電話訪問。在95%的信賴度之下，請問有效樣本應該在多少以上才能使抽樣誤差控制在3%之下？  
 (A) 423 (B) 752 (C) 1068 (D) 1692
22. 某民調公司想了解民眾對於立法院通過『離島博奕法案』的支持度，採用電話訪問。成功訪問400人，調查結果顯示該議題的支持度為70%。在95%的信賴度之下，抽樣誤差有多少？  
 (A) 0.0329 (B) 0.0392 (C) 0.0426 (D) 0.0449
23. 母體平均數為  $\mu$ ，變異數為  $\sigma^2$ ，假設  $X_1, \dots, X_{10}$  為該母體的隨機樣本，則  $\bar{X}$  的變異數為：  
 (A)  $\sigma^2/100$  (B)  $\sigma^2/10$  (C)  $\sigma^2/2$  (D)  $\sigma^2$
24. 若已知母體平均數  $\mu = 50$ ，變異數為  $\sigma^2 = 25$ ，若欲達到  $P(|\bar{X} - \mu| \leq 1) \geq 0.99$  的準確度，需抽樣多少個樣本數？  
 (A) 91 (B) 144 (C) 167 (D) 224
25. 令  $(X_1, X_2, X_3)$  為由常態母體  $N(\mu, \sigma^2)$  抽出的一組隨機樣本， $T_1, T_2, T_3, T_4$  均為  $\mu$  的估計量，  
 $T_1 = (3X_1 + 3X_2 + 4X_3)/10$ ；  $T_2 = (X_1 + X_2 + X_3)/3$ ；  $T_3 = (X_1 + 2X_2 + 3X_3)/6$ ；  
 $T_4 = (2X_1 + 3X_2 + 4X_3)/9$ ，問下列何者為  $\mu$  的不偏估計量中變異數最小者？  
 (A)  $T_1$  (B)  $T_2$  (C)  $T_3$  (D)  $T_4$

## (二)、計算題：

26. 設有一母體之機率分配如下，

|        |     |     |     |
|--------|-----|-----|-----|
| $X$    | 5   | 9   | 12  |
| $f(X)$ | 0.3 | 0.2 | 0.5 |

若自母體以抽出放回之方式隨機抽二個樣本，表為  $(X_1, X_2)$ ：

- (1)  $\bar{X} = (X_1 + X_2)/2$  之期望值=\_\_\_\_\_及變異數=\_\_\_\_\_，與母體之平均數  $\mu$  及

變異數  $\sigma^2$  間的關係為  $\bar{X}$  的期望值=\_\_\_\_\* $\mu$ ？ $\bar{X}$  的變異數=\_\_\_\_\* $\sigma^2$

Ans： 9.3， 4.605， 1， 1/2

題解

- (2)  $E(X) = \mu = \sum x f(x) = 1.5 + 1.8 + 6 = 9.3$ ；  $E(X^2) = \sum x^2 f(x) = 7.5 + 16.2 + 72 = 95.7$



$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 95.7 - (9.3)^2 = 9.21$$

$$E(\bar{X}) = \mu_x = \sum x f(x) = 9.3 = \mu \quad E(\bar{X}^2) = 2.25 + 5.88 + 21.675 + 3.24 + 22.05 + 36 = 91.095$$

$$\text{Var}(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - (E(\bar{X}))^2 = 91.095 - (9.3)^2 = 4.605 = \frac{\sigma^2}{2}$$

27. 一常態母體之平均數50，標準差5，由其中任取16個樣本，並得樣本空間，則：

- (1)  $\bar{X}$  的抽樣分配為\_\_\_\_\_
- (2) 樣本平均數大於52的機率=\_\_\_\_\_
- (3) 樣本平均數介於48與51的機率=\_\_\_\_\_

Ans:  $N(50, 25/16)$ , 0.0448, 0.7333

題解

$$(1) \text{ 母體為常態分配，}\sigma = 5, n=16(\text{小樣本}), \text{ 可得知 } \bar{X} \sim N(50, \frac{25}{16}) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - 50}{5/\sqrt{16}} \sim N(0,1)$$

$$(2) P(\bar{X} > 52) = P(Z > \frac{52-50}{5/4}) = P(Z > 1.6) = 1 - 0.9452 = 0.0448$$

$$(3) P(48 < \bar{X} < 51) = P(-1.6 < Z < 0.8) = 0.7881 - 0.0548 = 0.7333$$

28. 桃園機場的行李中心處理一批旅客行李，旅客行李的重量假設服從一個常態分配，其平均數 $\mu=28$ 公斤，而其標準差 $\sigma$ 未知，如果由其中隨機抽出36件行李，並稱其重量，得到樣本標準差 $s=4$ 公斤。(12%)

- (1) 旅客行李之樣本平均重量 $\bar{X}$ 之抽樣分配為\_\_\_\_\_?
- (2) 以 $\mu=28$ 公斤為中心，而機率為0.95之 $\bar{X}$ 的區間為\_\_\_\_\_
- (3) 樣本平均重量 $\bar{X}$ 落在[26.8, 29.2]之間的機率為\_\_\_\_\_

Ans:  $N(28, 16/36)$ , [26.69, 29.31], 0.9282

題解

$$(1) \text{ 母體為常態分配，}\sigma \text{ 未知，但為大樣本，可得知 } \bar{X} \sim N(28, \frac{16}{36}) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - 28}{4/\sqrt{36}} \sim N(0,1)$$

$$(2) P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = P(-1.96 \leq \frac{\bar{X} - 28}{4/\sqrt{36}} \leq 1.96) = 0.95 \Rightarrow P(26.69 \leq \bar{X} \leq 29.31) = 0.95,$$

所以，以 $\mu = 28$ 為中心，機率為95%的 $\bar{X}$ 區間為[26.69, 29.31]

$$(3) \bar{X} \sim N(28, 16/36),$$

$$P(26.8 < \bar{X} < 29.2) = P(\frac{26.8-28}{4/6} < Z < \frac{29.2-28}{4/6}) = P(-1.8 < Z < 1.8) = 0.9641 - 0.0359 = 0.9282$$

29. 已知某一 20-60 歲成年人族群的收縮壓分布呈雙峰分布，一個高峰在 120 mmHg 處，另一個高峰在 170 mmHg 處，而此分布的平均值與標準差則分別為 128 mmHg 與 24 mmHg。今從此成年人族群中隨機抽出 36 人，此 36 人的平均收縮壓為  $\bar{X}$ ，而  $\bar{X}$  為一隨機變數， $\bar{X}$  介於 120 到 132 的機率 = \_\_\_\_\_。

Ans: 0.8185

題解

母體為非常態分配， $\sigma$  未知，但為大樣本，可得知  $\bar{X} \approx N(128, \frac{24^2}{36}) \Rightarrow Z \square \frac{\bar{X} - 128}{24/\sqrt{36}} \sim N(0,1)$

$$P(120 < \bar{X} < 132) = P\left(\frac{120-128}{24/6} < Z < \frac{132-128}{24/6}\right) = P(-2 < Z < 1) = 0.8413 - 0.0228 = 0.8185$$

30. 自具有常態母體  $N(100, \sigma^2)$  抽出一組  $n=16$  的隨機樣本，並得到  $s = 9$ ，則

(1)  $P(\bar{X} > 96.056) = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) 以  $\mu=100$  為中心，而機率為 0.95 之  $\bar{X}$  的區間為 \_\_\_\_\_

Ans: 0.95, [95.21, 104.79]

題解

(1) 母體為常態分配，小樣本，但母體標準差  $\sigma$  未知，所以， $t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$$P(\bar{X} \leq 96.056) = P\left(t \leq \frac{96.056 - 100}{9/\sqrt{16}}\right) = P(t \leq -1.753) = 1 - P(t < -1.753) = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$(2) P(-2.131 \leq t \leq 2.131) = P\left(-2.131 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{9/\sqrt{16}} \leq 2.131\right) = 0.95 \Rightarrow P(95.21 \leq \bar{X} \leq 104.79) = 0.95,$$

所以，以  $\mu=100$  為中心，機率為 95% 的  $\bar{X}$  區間為 [95.21, 104.79]

31. 高雄市的市民中，習慣以捷運系統來當做交通工具的人佔總市民人數的 36%。

(1) 若隨機抽選 225 名高雄市民，其中習慣以捷運系統來當做交通工具的比例  $\bar{p}$  的分配趨近的分配為 \_\_\_\_\_ 其變異數 = \_\_\_\_\_

(2) 樣本比例  $\bar{p}$  介於 [0.3, 0.4] 之間的機率為 \_\_\_\_\_

(3) 以  $\bar{P} = 0.36$  為中心，而機率為0.90之  $\bar{P}$  的區間為\_\_\_\_\_

Ans:  $N(0.36, 0.001024)$ , 0.864,  $[0.3074, 0.4126]$

題解

$$(1) \text{ 大樣本時，利用中央極限定理可得知， } \bar{P} \sim N(0.36, \frac{0.36 \times 0.64}{225}) \Rightarrow Z = \frac{\bar{P} - 0.36}{0.032} \sim N(0,1)$$

$$E(\bar{P}) = p = 0.36, \quad \text{Var}(\bar{P}) = \frac{p(1-p)}{n} = 0.001024$$

$$(2) P(0.3 \leq \bar{P} \leq 0.4) = P(\frac{0.3-0.36}{0.032} \leq Z \leq \frac{0.4-0.36}{0.032}) = P(-1.875 \leq Z \leq 1.25) = 0.8944 - 0.0304 = 0.864$$

$$(3) P(-1.645 \leq Z \leq 1.645) = P(-1.645 \leq \frac{\bar{P} - 0.36}{0.032} \leq 1.645) = 0.90 \Rightarrow P(0.3074 \leq \bar{P} \leq 0.4126) = 0.90$$

所以，以  $\bar{p} = 0.36$  為中心，機率為90%的  $\bar{X}$  區間為  $[0.3074, 0.4126]$

32. 青山農場生產蘋果，其重量為一常態分配，平均數為460公克，標準差為18公克，則：

(1) 抽取 25個蘋果，25個蘋果平均重量大於470公克的機率=\_\_\_\_\_

(2) 將9個蘋果裝成一盒，則一盒蘋果重量(只計算蘋果重量)的平均數=\_\_\_\_\_  
與變異數=\_\_\_\_\_

(3) 若要求一盒的蘋果重量要在4525~4675之間時，則有\_\_\_\_\_ %盒的蘋果不符合規定？

Ans: 0.0027, 4140, 2916, 6.44

題解

$$(1) \text{ 母體為常態分配， } \sigma = 18 \text{ (已知)，小樣本，可得知 } \bar{X} \sim N(460, \frac{324}{25}) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - 460}{18/\sqrt{25}} \sim N(0,1)$$

$$P(\bar{X} > 470) = P(Z > \frac{470 - 460}{18/\sqrt{25}}) = P(Z > 2.78) = 1 - 0.9973 = 0.0027$$

(2) 一盒蘋果(不含箱子)的重量也是服從常態分配，也就是說， $\sum X_i \sim N(4140, 2916)$

$$E(\sum X_i) = 4140 \quad \text{Var}(\sum X_i) = 2916$$

$$(3) P(\text{符合規定}) = P(4500 \leq \sum X_i \leq 4700) = P(\frac{4040 - 4140}{\sqrt{2916}} \leq Z \leq \frac{4240 - 4140}{\sqrt{2916}})$$

$$= P(-1.85 \leq Z \leq 1.85) = 0.9678 - 0.0322 = 0.9356$$

$$P(\text{不符合規定}) = 1 - 0.9356 = 0.0644 = 6.44\%$$

33. 隨機變數X代表草莓點心中的草莓個數，有下列非常態分配：

|        |     |     |     |     |
|--------|-----|-----|-----|-----|
| x      | 4   | 5   | 6   | 7   |
| P(X=x) | 0.2 | 0.4 | 0.3 | 0.1 |

(1) 抽出 36 塊草莓點心為一組隨機樣本，則利用中央極限定理，則樣本平均數  $\bar{X}$

的平均數  $\mu_{\bar{X}} =$  \_\_\_\_\_ 和變異數  $\sigma_{\bar{X}}^2 =$  \_\_\_\_\_。

(2)  $P(\bar{X} < 5.5) =$  \_\_\_\_\_ 和  $P(\bar{X} > 5.12) =$  \_\_\_\_\_

Ans: 5.3, 0.0225, 0.9082, 0.1151

題解

$$(1) E(X) = \mu = \sum_{x=4}^7 xf(x) = 0.8 + 2 + 1.8 + 0.7 = 5.3$$

$$E(X^2) = \sum_{x=4}^7 x^2 f(x) = 3.2 + 10 + 10.8 + 4.9 = 28.9$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 28.9 - (5.3)^2 = 0.81$$

(2) 母體為非常態分配，大樣本，利用中央極限定理得知， $\bar{X} \approx N(5.3, \frac{0.81}{36})$

$$\Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - 5.3}{\frac{0.9}{\sqrt{36}}} \sim N(0,1) \quad E(\bar{X}) = \mu = 5.3, \quad V(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{0.81}{36} = 0.0225$$

(3)  $\bar{X} \approx N(5.3, 0.0225)$ ,

$$P(\bar{X} < 5.5) = P(Z < \frac{5.5 - 5.3}{0.15}) = P(Z < 1.33) = 0.5 + 0.4082 = 0.9082$$

$$P(\bar{X} > 5.12) = P(Z < \frac{5.12 - 5.3}{0.15}) = P(Z < -1.2) = P(Z > 1.2) = 0.5 - 0.3849 = 0.1151$$

34. 設  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是一組隨機樣本，

$$P(X_i = 1) = 0.65, P(X_i = 0) = 0.35 \text{ 對 } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

(1) 當  $n=10$  時， $P(\bar{P} \geq 0.8) = ?$  \_\_\_\_\_

(2) 當  $n=100$  時， $P(\bar{X} \geq 0.8) = ?$  \_\_\_\_\_

Ans: 0.2616, 0.0008

題解

$$(1) \bar{P} \approx B(10, 0.8)$$

$$P(\bar{P} \geq 8) = P(\bar{P} = 8) + P(\bar{P} = 9) + P(\bar{P} = 10) = 1 - P(\bar{P} \leq 7) = 1 - 0.7384 = 0.2616$$

$$(2) n=100(\text{大樣本}), \text{可用中央極限定理, 所以 } \bar{P} \approx N(0.65, 0.0477),$$

$$P(\bar{P} \geq 0.8) = P(Z \geq \frac{0.8-0.65}{0.0477}) = P(Z \geq 3.14) = 1 - 0.9992 = 0.0008$$

35. 哈林企業所生產的花式磁杯，其重量為一常態分配，平均數為147.8公克，標準差為3.51公克，現抽出25個花式磁杯，其中 $\bar{X}$ 和 $S^2$ 代表此組樣本的平均重量及其重量的變異數，則：

$$(1) \text{此組樣本的變異數大於 } 18.69 \text{ 公克的機率} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) P(5.5728 \leq S^2 \leq 22.063) = ? \underline{\hspace{2cm}}.$$

Ans : 0.05 , 0.98

題解

$$(1) \text{由於母體為常態分配, } (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(24),$$

$$P(S^2 > 18.69) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{24 \times 18.69}{3.51^2}\right) = P(\chi^2 > 36.408) = 0.05$$

$$(2) P(5.5728 \leq S^2 \leq 22.063) = P\left(\frac{24 \times 5.5728}{3.51^2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \frac{24 \times 22.063}{3.51^2}\right)$$

$$= P(10.856 \leq \chi^2 \leq 42.98) = P(\chi^2 \leq 42.98) - P(\chi^2 \leq 10.856) = 0.99 - 0.01 = 0.98$$

## 抽樣分配（解答）

### （一）、選擇題：

|    |   |    |   |    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|
| 1  | A | 2  | B | 3  | D | 4  | D | 5  | A |
| 6  | C | 7  | B | 8  | A | 9  | D | 10 | A |
| 11 | C | 12 | B | 13 | C | 14 | C | 15 | C |
| 16 | A | 17 | B | 18 | B | 19 | C | 20 | B |
| 21 | C | 22 | D | 23 | B | 24 | C | 25 | B |

### （二）、計算題：

26.(解答)：

(1)

| $x_1 \backslash x_2$ | 5                                 | 9                                  | 12                                 |
|----------------------|-----------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 5                    | $(2,2) \Rightarrow \bar{x} = 5$   | $(2,6) \Rightarrow \bar{x} = 7$    | $(2,9) \Rightarrow \bar{x} = 8.5$  |
| 9                    | $(6,2) \Rightarrow \bar{x} = 7$   | $(6,6) \Rightarrow \bar{x} = 9$    | $(6,9) \Rightarrow \bar{x} = 10.5$ |
| 12                   | $(9,2) \Rightarrow \bar{x} = 8.5$ | $(9,6) \Rightarrow \bar{x} = 10.5$ | $(9,9) \Rightarrow \bar{x} = 12$   |

所以， $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$  之抽樣分配為：

| $\bar{x}$    | 5    | 7    | 8.5  | 9    | 10.5 | 12   | 合計   |
|--------------|------|------|------|------|------|------|------|
| $f(\bar{x})$ | 0.09 | 0.12 | 0.30 | 0.04 | 0.20 | 0.25 | 1.00 |

$$(2) \quad E(X) = \mu = \sum x f(x) = 1.5 + 1.8 + 6 = 9.3 ; \quad E(X^2) = \sum x^2 f(x) = 7.5 + 16.2 + 72 = 95.7$$

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 95.7 - (9.3)^2 = 9.21$$

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{x}} = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 9.3 = \mu \quad E(\bar{X}^2) = 2.25 + 5.88 + 21.675 + 3.24 + 22.05 + 36 = 91.095$$

$$Var(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - (E(\bar{X}))^2 = 91.095 - (9.3)^2 = 4.605 = \frac{\sigma^2}{2}$$

27.(解答)：

$$(1) \quad \text{母體為常態分配，}\sigma = 5, n=16(\text{小樣本}), \text{可得知 } \bar{X} \square N(50, \frac{25}{16}) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - 50}{5/\sqrt{16}} \sim N(0,1)$$

$$(2) \quad P(\bar{X} > 52) = P(Z > \frac{52-50}{5/4}) = P(Z > 1.6) = 1 - 0.9452 = 0.0448$$

$$(3) \quad P(48 < \bar{X} < 51) = P(-1.6 < Z < 0.8) = 0.7881 - 0.0548 = 0.7333$$

28.(解答)：

$$(1) \quad \text{母體為常態分配，}\sigma \text{ 未知，但為大樣本，可得知 } \bar{X} \square N(28, \frac{16}{36}) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - 28}{4/\sqrt{36}} \sim N(0,1)$$

$$(2) \quad P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = P(-1.96 \leq \frac{\bar{X} - 28}{4/\sqrt{36}} \leq 1.96) = 0.95 \Rightarrow P(26.69 \leq \bar{X} \leq 29.31) = 0.95,$$

所以，以 $\mu = 28$ 為中心，機率为95%的 $\bar{X}$ 區間為 $[26.69, 29.31]$

$$(3) \quad \bar{X} \square N(28, 16/36),$$

$$P(26.8 < \bar{X} < 29.2) = P(\frac{26.8-28}{4/6} < Z < \frac{29.2-28}{4/6}) = P(-1.8 < Z < 1.8) = 0.9641 - 0.0359 = 0.9282$$

29.(解答)：

母體為非常態分配， $\sigma$ 未知，但為大樣本，可得知  $\bar{X} \approx N(128, \frac{24^2}{36}) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - 128}{24/\sqrt{36}} \sim N(0,1)$

$$P(120 < \bar{X} < 132) = P\left(\frac{120-128}{24/6} < Z < \frac{132-128}{24/6}\right) = P(-2 < Z < 1) = 0.8413 - 0.0228 = 0.8185$$

30.(解答)：

(1) 母體為常態分配，小樣本，但母體標準差 $\sigma$ 未知，所以， $t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$$P(\bar{X} \leq 96.056) = P\left(t \geq \frac{96.056 - 100}{9/\sqrt{16}}\right) = P(t \geq -1.753) = 1 - P(t < -1.753) = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$(2) P(-2.131 \leq t \leq 2.131) = P\left(-2.131 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{9/\sqrt{16}} \leq 2.131\right) = 0.95 \Rightarrow P(95.21 \leq \bar{X} \leq 104.79) = 0.95,$$

所以，以 $\mu = 100$ 為中心，機率為95%的 $\bar{X}$ 區間為 $[95.21, 104.79]$

31.(解答)：

(1) 大樣本時，利用中央極限定理可得知， $\bar{P} \sim N(0.36, \frac{0.36 \times 0.64}{225}) \Rightarrow Z = \frac{\bar{P} - 0.36}{0.032} \sim N(0,1)$

$$E(\bar{P}) = p = 0.36, \quad \text{Var}(\bar{P}) = \frac{p(1-p)}{n} = 0.001024$$

$$(2) P(0.3 \leq \bar{P} \leq 0.4) = P\left(\frac{0.3-0.36}{0.032} \leq Z \leq \frac{0.4-0.36}{0.032}\right) = P(-1.875 \leq Z \leq 1.25) = 0.8944 - 0.0304 = 0.864$$

$$(3) P(-1.645 \leq Z \leq 1.645) = P\left(-1.645 \leq \frac{\bar{P} - 0.36}{0.032} \leq 1.645\right) = 0.90 \Rightarrow P(0.3074 \leq \bar{P} \leq 0.4126) = 0.90$$

所以，以 $\bar{p} = 0.36$ 為中心，機率為90%的 $\bar{X}$ 區間為 $[0.3074, 0.4126]$

32.(解答)：

(1) 母體為常態分配， $\sigma = 18$ (已知)，小樣本，可得知  $\bar{X} \sim N(460, \frac{324}{25}) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - 460}{18/\sqrt{25}} \sim N(0,1)$

$$P(\bar{X} > 470) = P\left(Z > \frac{470 - 460}{18/\sqrt{25}}\right) = P(Z > 2.78) = 1 - 0.9973 = 0.0027$$

(2) 一盒蘋果(不含箱子)的重量也是服從常態分配，也就是說， $\sum X_i \sim N(4140, 2916)$

$$E(\sum X_i) = 4140 \quad \text{Var}(\sum X_i) = 2916$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad P(\text{符合規定}) &= P(4500 \leq \sum X_i \leq 4700) = P\left(\frac{4040 - 4140}{\sqrt{2916}} \leq Z \leq \frac{4240 - 4140}{\sqrt{2916}}\right) \\
 &= P(-1.85 \leq Z \leq 1.85) = 0.9678 - 0.0322 = 0.9356 \\
 P(\text{不符合規定}) &= 1 - 0.9356 = 0.0644 = 6.44\%
 \end{aligned}$$

33.(解答) :

$$(1) \quad E(X) = \mu = \sum_{x=4}^7 xf(x) = 0.8 + 2 + 1.8 + 0.7 = 5.3$$

$$E(X^2) = \sum_{x=4}^7 x^2 f(x) = 3.2 + 10 + 10.8 + 4.9 = 28.9$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 28.9 - (5.3)^2 = 0.81$$

$$(2) \quad \text{母體爲非常態分配，大樣本，利用中央極限定理得知，}\bar{X} \approx N(5.3, \frac{0.81}{36})$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - 5.3}{\frac{0.9}{\sqrt{36}}} \sim N(0,1) \quad E(\bar{X}) = \mu = 5.3, \quad V(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{0.81}{36} = 0.0225$$

$$(3) \quad \bar{X} \approx N(5.3, 0.0225),$$

$$P(\bar{X} < 5.5) = P(Z < \frac{5.5 - 5.3}{0.15}) = P(Z < 1.33) = 0.5 + 0.4082 = 0.9082$$

$$P(\bar{X} > 5.12) = P(Z < \frac{5.12 - 5.3}{0.15}) = P(Z < -1.2) = P(Z > 1.2) = 0.5 - 0.3849 = 0.1151$$

34.(解答) :

$$(1) \quad \bar{P} \approx B(10, 0.8)$$

$$P(\bar{P} \geq 8) = P(\bar{P} = 8) + P(\bar{P} = 9) + P(\bar{P} = 10) = 1 - P(\bar{P} \leq 7) = 1 - 0.7384 = 0.2616$$

$$(2) \quad n=100(\text{大樣本}), \text{可用中央極限定理, 所以 } \bar{P} \approx N(0.65, 0.0477),$$

$$P(\bar{P} \geq 0.8) = P(Z \geq \frac{0.8 - 0.65}{0.0477}) = P(Z \geq 3.14) = 1 - 0.9992 = 0.0008$$

35.(解答) :

$$(1) \quad \text{由於母體爲常態分配, } (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(24),$$

$$P(S^2 > 18.69) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{24 \times 18.69}{3.51^2}\right) = P(\chi^2 > 36.408) = 0.05$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad P(5.5728 \leq S^2 \leq 22.063) &= P\left(\frac{24 \times 5.5728}{3.51^2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \frac{24 \times 22.063}{3.51^2}\right) \\
 &= P(10.856 \leq \chi^2 \leq 42.98) = P(\chi^2 \leq 42.98) - P(\chi^2 \leq 10.856) = 0.99 - 0.01 = 0.98
 \end{aligned}$$