統計學

第六章　常用的機率分配

書號：512282

編著 江建良

普林斯頓國際有限公司

6-1 分立均等分配

- 機率分配
  - 間斷機率分配
    - 1. 分立均等分配
    - 2. 點二項分配
    - 3. 二項分配
    - 4. 超幾何分配
    - 5. 卜瓦松分配
  - 連續機率分配
    - 1. 均勻分配
    - 2. 常態分配

6-1 分立均等分配

- **定義：**

$$f(X)=\frac{1}{n}\ ,\ x=1,2,\cdots,n\ ,\ n\text{為母數}$$

- **表徵數：**

(1) $E(X)=\dfrac{n+1}{2}$

(2) $V(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$

例題 6-1

擲一個骰子一次，令 X 表示出現的點數，試求

(a) X 之機率分配。

(b) $E(X), V(X)$。

解： (a) $f(X)=\dfrac{1}{6}, x=1,2,3,4,5,6$

$\because$ 一個骰子有六面，每面之點數出現的機率均等爲 1/6，故爲分立均等分配。

(b) ① $E(X)=\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{6+1}{2}=3.5$

$$=1\left(\frac{1}{6}\right)+2\left(\frac{1}{6}\right)+3\left(\frac{1}{6}\right)+4\left(\frac{1}{6}\right)+5\left(\frac{1}{6}\right)+6\left(\frac{1}{6}\right)=3.5$$

從期望值的定義計算結果亦同。

② $V(X)=\dfrac{n^2-1}{12}=\dfrac{36-1}{12}=2.92$

$$=(1-3.5)^2\frac{1}{6}+(2-3.5)^2\frac{1}{6}+(3-3.5)^2\frac{1}{6}+(4-3.5)^2\frac{1}{6}$$
$$+(5-3.5)^2\frac{1}{6}+(6-3.5)^2\frac{1}{6}=2.92$$

從變異數的定義計算結果亦同。

6-2 點二項分配

- **定義：**

$$f(X) = P^x q^{1-x}, \ x = 0,1, \ q = 1-P, \ P \text{ 為母數}$$

或

$$= 0 \qquad , \ x = \text{其他數值}$$

- **表徵數：**

(1) $E(X) = P$

(2) $V(X) = Pq$

例題 6-2

擲一個骰子一次，令出現點數 6 為成功事件，其他點數為失敗事件，設 X 表示出現點數 6 的次數，試求：

(a) X 之機率分配。

(b) $E(X), V(X)$。

解： ∵ 此實驗分爲兩類（點數 6，非點數 6（即 1, 2, 3, 4, 5））事件，並且只試行一次（擲一個骰子一次），故爲點二項實驗，其分配爲點二項分配。

實驗者所要的爲出現點數 6，設爲成功事件，以 $X=1$ 表示，其機率爲 $P=\frac{1}{6}$，另一類則爲失敗事件，以 $X=0$ 表示，其機率爲

$$q=1-P=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

(a) X 之機率分配爲

$$f(X)=\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{1-x}\ ,\ x=0,1$$

或

$$=0\qquad\qquad ,\ x=\text{其他數值}$$

X	0	1
$f(x)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

(b) $E(X)=P=\frac{1}{6}=0\left(\frac{5}{6}\right)+1\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}$

$$V(X)=Pq=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{36}=\left(0-\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)+\left(1-\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{36}$$

例題 6-3

設有一批產品，其不良率為 3%，現隨機抽取一件產品，令 X 為不良品的件數，試求 X 之機率分配及 $E(X), V(X)$。

解： (a) ∵ 此爲點二項實驗，∴ 爲點二項分配

$$f(X) = (0.03)^x (0.97)^{1-x}\ ,\ x = 0\,,1$$

或

$$= 0 \qquad\qquad ,\ x = \text{其他數值}$$

(b) $E(X) = P = 0.03$

$V(X) = Pq = 0.03(0.97) = 0.0291$

6-3 二項分配

- **定義：**

$f(X) = C_x^n P^x q^{n-x}$, $x = 0,1,2,\cdots,n$, $q = 1-P$ ，n 與 P 為母數

或

$= 0$, $x =$ 其他數值

- **表徵數：**

(1) $E(X) = nP$

(2) $V(X) = nPq$

例題 6-4

張先生新婚，計畫婚後生育三個小孩（設均為單胞胎），令 X 為生男孩的個數，試求：

(a) X 之機率分配。

(b) $E(X), V(X)$。

(c) 僅有一個男孩的機率。

(d) 恰有二個男孩的機率。

(e) 全部女孩的機率。

解：(a) ∵ 生育不是男孩就是女孩（機率各半），而且第一次生育性別與第二次生育性別無關，張先生打算有三個小孩 $n=3$，所以符合二項實驗的條件，故為二項分配，其分配式為

$$f(X)=C_x^n P^x q^{n-x}=C_x^3\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}\ , x=0,1,2,3$$

或 $\qquad$ (x 表示男孩個數)

$=0 \qquad , x=$ 其他數值

(b) $E(X)=nP=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$V(X)=nPq=3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

(c) $P(x=1)=C_1^3\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}=C_1^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=0.375$

(d) $P(x=2)=C_2^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2}=C_2^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=0.375$

(e) $P(x=0)=C_0^3\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{3-0}=C_0^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=0.125$

例題 6-5

擲一個骰子 5 次，試求其出現點數 4 的次數之機率分配及恰好出現三次點數 4 的機率。

解：(a) 是爲二項分配

$$f(X) = C_x^5 \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{5-x} \quad , x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

或 $= 0$ $\quad , x =$ 其他數值

(b) $P(x=3) = C_3^5 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5!}{3!(5-3)!} \times \frac{5^2}{6^5} = 0.032$

例題 6-6

試利用二項機率分配表，求算下列機率：

(a) $n=8, P=0.3, x=5$

(b) $n=15, P=0.5, 0\leq x\leq 10$

(c) $n=20, P=0.8, x>15$

解： 由於二項機率表的編製是以累積到 x 次數之機率和建表，所以必須以累加的觀點計算機率值。

(a) $n=8$, $P=0.3$, $x=5$

$$P(x=5)=\sum_{X=0}^{5}C_x^8(0.3)^x(0.7)^{8-x}-\sum_{X=0}^{4}C_x^8(0.3)^x(0.7)^{8-x}$$

$$=0.989-0.942=0.047$$

(b) $n=15$, $P=0.5$, $0\le x\le 10$

$$P(0\le x\le 10)=\sum_{x=0}^{10}C_x^{15}(0.5)^x(0.5)^{15-x}=0.941$$

(c) $n=20$, $P=0.8$, $x>15$

$$P(x>15)=1-\sum_{x=0}^{15}C_x^{20}(0.8)^x(0.2)^{20-x}=1-0.370=0.630$$

例題 6-7

設 X 為二項隨機變數，其表徵數 $E(X)=6, V(X)=3$，試求該分配的母數。

解： $\because E(X)=nP=6, V(X)=nPq=3$

$$\frac{E(X)}{V(X)}=\frac{nP}{nPq}=\frac{6}{3}\Rightarrow 6q=3\Rightarrow q=\frac{1}{2}, \therefore P=\frac{1}{2}$$

$$n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=3\Rightarrow n=12$$

$\therefore$ 母數 $n=12, P=\frac{1}{2}$

6-4 超幾何分配

- **定義：**

$$f(X)=\frac{C_x^K C_{n-x}^{N-K}}{C_n^N}\ ,\ x=0,1,2,\cdots,\min(n,K)$$

$$\text{或}\quad =0\qquad ,\ x=\text{其他數值}$$

- **表徵數：**

(1) $E(X)=n\cdot\frac{K}{N}$

(2) $V(X)=\frac{N-n}{N-1}\cdot n\cdot\frac{K}{N}\cdot\frac{N-K}{N}$

例題 6-8

自 6 男 3 女中，以不放回方式隨機抽取 4 人組成福利委員會，令 X 表示男性人數，試求：

(a) X 之機率分配。

(b) 以圖表示母體與樣本間的關係。

(c) 恰有二位男性的機率。

(d) 3 個以上（含 3 個）男性的機率。

(e) $E(X), V(X)$。

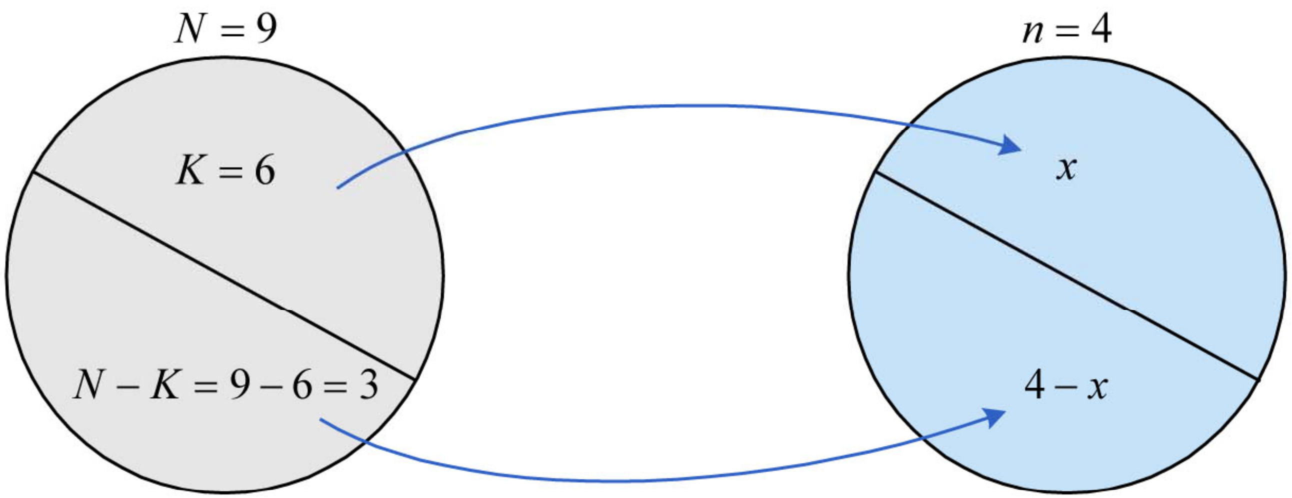
解：(a) ∵ 母體為有限母體，分兩類，不放回抽樣，因此每次試行不獨立。

故為超幾何分配。

$$f(X)=\frac{C_x^6 C_{4-x}^3}{C_4^9} \quad ,x=1,2,3,4$$

$$\text{或} \quad =0 \quad ,x=\text{其他數值}$$

(b)



(c) $P(X=2)=\dfrac{C_2^6C_2^3}{C_4^9}=\dfrac{\dfrac{6\times5}{2\times1}\times\dfrac{3\times2}{2\times1}}{\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}}=\dfrac{45}{126}=0.357$

(d) $P(X\geq3)=P(X=3)+P(X=4)$

$$=\frac{C_3^6C_1^3}{C_4^9}+\frac{C_4^6C_0^3}{C_4^9}=\frac{60}{126}+\frac{15}{126}=0.595$$

(e) $E(X)=n\dfrac{K}{N}=4\left(\dfrac{6}{9}\right)=\dfrac{8}{3}$

$$V(X)=\frac{N-n}{N-1}\cdot n\cdot\frac{K}{N}\cdot\frac{N-K}{N}=\frac{9-4}{9-1}(4)\left(\frac{6}{9}\right)\left(\frac{3}{9}\right)=\frac{5}{9}$$

6-5 卜瓦松分配

- **定義：**

$$f(X) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots$$

或 $= 0$, $x =$ 其他數值

- **表徵數：**

(1) $E(X) = \mu$

(2) $V(X) = \mu$

例題 6-9

統一公司每天 10：00～10：10，總機平均接到 10 通電話，令 X 表示明天同一時段接到電話的次數，試求：

(a) X 之機率分配

(b) 接到 5 次電話之機率

(c) 至多 2 次電話之機率

解：(a) ∵ 發生於一段時間 (10：00 ~ 10：10) 之成功次數（接到電話）之期望值（平均 10 次）爲已知，且極短的時間內，僅接到電話或不接到電話兩種情況，每次均獨立發生而機率相同，故爲卜瓦松分配。由題目可知，10 分鐘有 10 通電話，由 $\lambda t=\mu \Rightarrow \lambda \times 10 = 10 \Rightarrow \lambda = 1$，即平均 1 分鐘有 1 通電話，此在每一時間不變（特性 2)，所以明天“同一時段（亦爲 10 分鐘）”之 μ 亦爲 10，即 $\mu=10$。

$$f(X)=\frac{10^x}{x!}e^{-10}, \quad x=0,1,2,\cdots$$

$$\text{或} \quad =0 \quad\quad , x=\text{其他數值}$$

(b) $P(x=5)=\frac{10^5}{5!}e^{-10}=0.0378$（查表）

(c) $P(x\le 2)=P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)$

$$=0.0000+0.0005+0.0023=0.0028$$

例題 6-10

遠紡公司之紡織機織出之布匹平均 5 碼有一個缺點，現有 40 碼布，試問其中含有 4 個缺點的機率為何？該實驗之機率分配為何？

解：此實驗爲卜瓦松實驗，因爲是屬發生於某一區域（布匹）的問題，所以該分配是屬卜瓦松分配。

由原資料 5 碼有一個缺點，由 $\lambda t=\mu \Rightarrow \lambda\cdot 5=1\Rightarrow \lambda=\frac{1}{5}$，即平均一碼有 $\frac{1}{5}$ 個缺點，此 $\frac{1}{5}$ 個缺點，在每碼之間不變（特性 2)，所以 $t_1=40$ 碼之平均缺點爲 $\mu_1=t_1\cdot\lambda=40\times\frac{1}{5}=8$ 個，故

$$f(X)=\frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}=\frac{8^x}{x!}e^{-8}\ ,x=0,1,2,3,\cdots$$

$$\text{或}\quad =0 \qquad ,x=\text{其他數值}$$

$$P(x=4)=\frac{8^4}{4!}e^{-8}=0.0573\ (\text{查表})$$

例題 6-11

每 10 分鐘進入一隧道之平均車輛為 5 輛，試求在 2 分鐘內進入此隧道的車輛超過 3 輛的機率為何？

解：(a) 先求 λ，$\because \lambda t = \mu \Rightarrow \lambda = \dfrac{\mu}{t} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$，即每分鐘進入 $\dfrac{1}{2}$ 輛。

(b) 2 分鐘內之平均車輛 $= t_1 \cdot \lambda = 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$，$\therefore$ 此為 $\mu = 1$ 之卜瓦松分配

$$f(X) = \frac{1^x}{x!} e^{-1}\text{。}$$

$$\begin{aligned} P(x \geq 4) &= 1 - P(x \leq 3) \\ &= 1 - (0.3679 + 0.3679 + 0.1839 + 0.0613) \\ &= 0.019 \end{aligned}$$

6-6 間斷分配間的關係

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{點二項分配} & \\
\text{超幾何分配} \arrow[r, "N\to\infty"'] & \text{二項分配} \arrow[u, "n=1"] \arrow[r, "\begin{array}{c}n\to\infty\\ P\text{ 或 }q\text{ 微小}\end{array}"'] & \text{卜瓦松分配}
\end{tikzcd}
$$

例題 6-12

大同電鍋每台不良率為 0.05，試求下列機率：

(a) 自一批電鍋中隨機抽取一台，其為不良品之機率。

(b) 自一批電鍋中隨機抽取五台，其中二台不良品的機率。

解：(a) $\because n=1$，$\therefore$ 爲點二項分配

$$P(x=1)=(0.05)^1(1-0.05)^0=0.05$$

(b) 爲二項分配

$$P(x=2)=C_2^5(0.05)^2(1-0.05)^3=0.022$$

例題 6-13

設一批產品 $N=10{,}000$ 件，其中有 2,000 件為不良品，若隨機抽取 10 件，試求恰有 3 件不良品的機率？

解：(a) 若以超幾何分配計算之

$$P(x=3)=\frac{C_3^{2,000}C_7^{8,000}}{C_{10}^{10,000}}$$

上述計算不易

(b) $\because n=10$ 比 $N=10{,}000$，相差甚多且 $\frac{n}{N}=\frac{10}{10{,}000}\le\frac{1}{20}$，故可用二項分配求解，

$$P(x=3)=\frac{C_3^{2,000}C_7^{8,000}}{C_{10}^{10,000}}\approx C_3^{10}\left(\frac{2{,}000}{10{,}000}\right)^3\left(1-\frac{2{,}000}{10{,}000}\right)^7$$

$$=C_3^{10}(0.2)^3(0.8)^7=0.201$$

例題 6-14

設有一產品其不良品在1,000件中有一件，今自一批中抽取300件，試問其中含有二個及二個以上不良品之機率為何？

解：(a) 若以二項分配計算之，則為

$$P(x \geq 2)=\sum_{x=2}^{300} C_x^{300}\left(\frac{1}{1{,}000}\right)^x\left(1-\frac{1}{1{,}000}\right)^{300-x}$$

上述計算不易

(b) 因為本題 $n\ (n=1{,}000)$ 大而 $P=\left(\frac{1}{1{,}000}\right)$ 很小 $(n>100,\ P<0.01)$，故

可用卜瓦松分配求解。

$$\begin{aligned}P(x \geq 2) &= 1-\sum_{x=0}^{1} C_x^{300}(0.001)^x(0.999)^{300-x}\\ &= 1-\sum_{x=0}^{1}\frac{(0.3)^x}{x!}e^{-0.3}\ (\mu=nP=300\times 0.001=0.3)\\ &= 1-(0.7408+0.2222)\\ &= 0.037\end{aligned}$$

6-7 均勻分配

- **定義：**

$$f(X) = \frac{1}{b-a}\ ,\ a \le X \le b$$

- **表徵數：**

(1) $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

(2) $V(X) = \dfrac{1}{12}(b-a)^2$

例題 6-15

假設 60 號公車發車時間在 7 點至 7 點 20 分，試求：

(a) 令 X 表示公車發車時間，求 X 之機率函數。

(b) 張先生在 7 點 8 分抵達公車站，可搭上公車的機率？

(c) 張先生在 7 點 15 分到達，公車已開走的機率？

(d) 張先生到達車站，至少要等 10 分鐘的機率？

(e) 等待時間的期望值與變異數。

解：(a) 機率函數 $f(X)=\dfrac{1}{20-0}=\dfrac{1}{20}, 0 \le x \le 20$

(b) $P(x \ge 8)=\dfrac{20-8}{20}=\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$

(c) $P(x \le 15)=\dfrac{15-0}{20}=\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{4}$

(d) $P(x \ge 10)=\dfrac{20-10}{20}=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$

(e) $E(X)=\dfrac{0+20}{2}=10$ (分)(公車平均會在 7 點 10 分到達)

$V(X)=\dfrac{(20-0)^2}{12}=33.33$

6-8 常態分配

- **定義：**

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , -\infty < x < \infty$$

- **表徵數：**

(1) $E(X) = \mu$

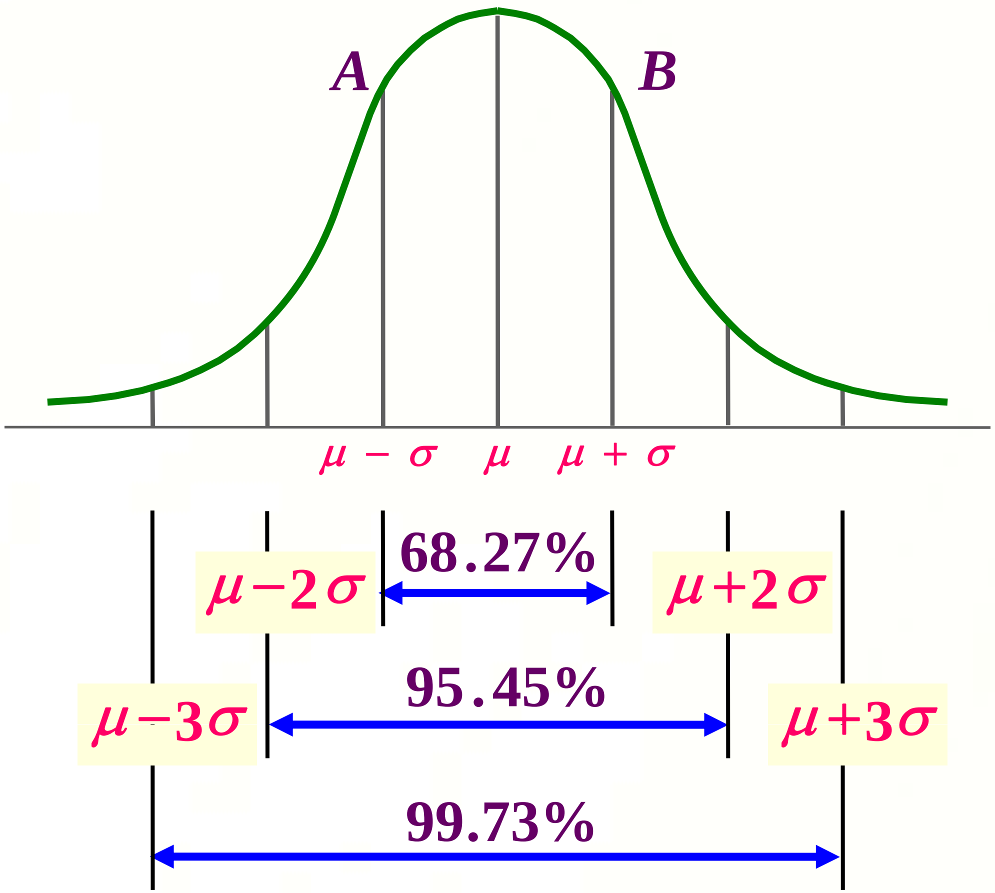
(2) $V(X) = \sigma^2$

(3) 偏態係數 $\beta_1 = 0$

(4) 峰態係數 $\beta_2 = 3$

6-8 常態分配

- **性質：**


A
B
$\mu-\sigma$
μ
$\mu+\sigma$
68.27%
$\mu-2\sigma$
$\mu+2\sigma$
95.45%
$\mu-3\sigma$
$\mu+3\sigma$
99.73%

6-9 標準常態分配

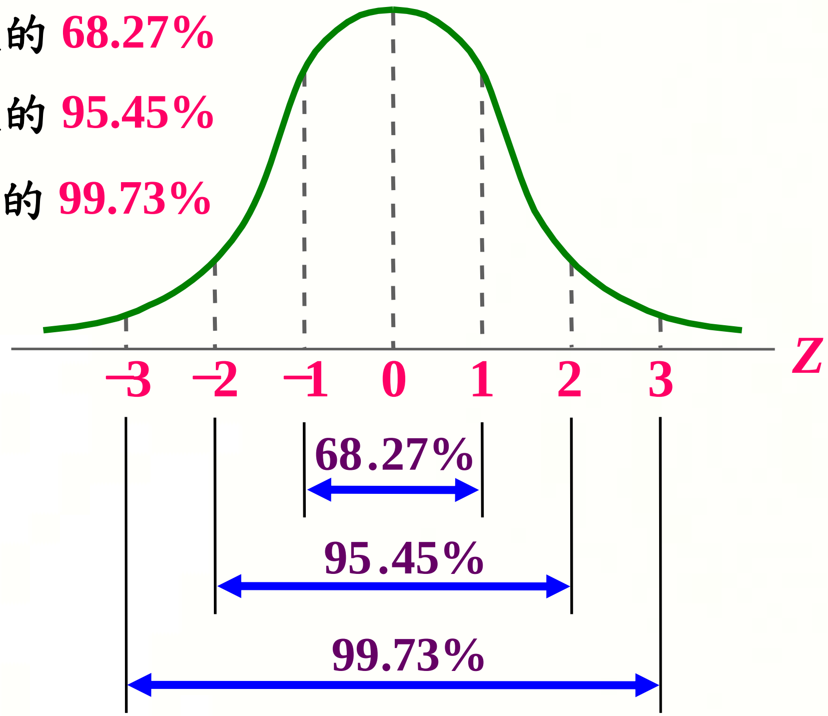
- **定義：** $f(Z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}$ ， $-\infty < Z < \infty$

- **性質：**

Z介於 ±1之間者，佔總數的68.27%

Z介於 ±2之間者，佔總數的95.45%

Z介於 ±3之間者，佔總數的99.73%



例題 6-16

試利用標準常態分配機率表求算下列機率：

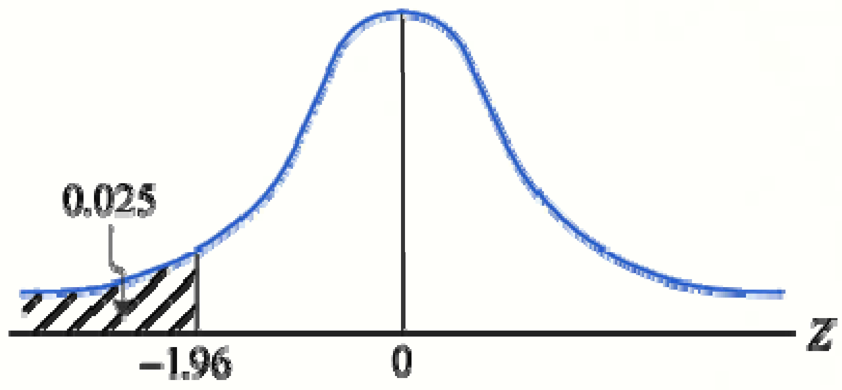
(a) $P(Z \le -1.96)$

(b) $P(-1.96 \le Z \le 1.96)$

(c) $P(Z \ge 1.96)$

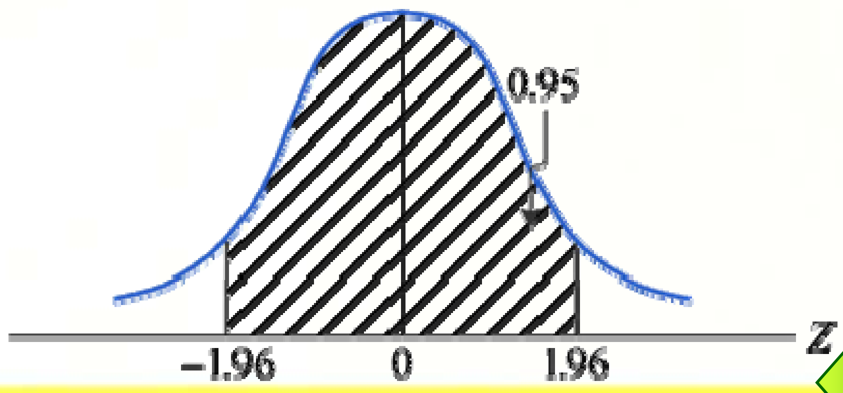
(d) $P(-1.5 \le Z \le -0.5)$

解：(a) $P(Z \le -1.96) = 0.0250$



(b) $P(-1.96 \le Z \le 1.96) = P(Z \le 1.96) - P(Z \le -1.96)$

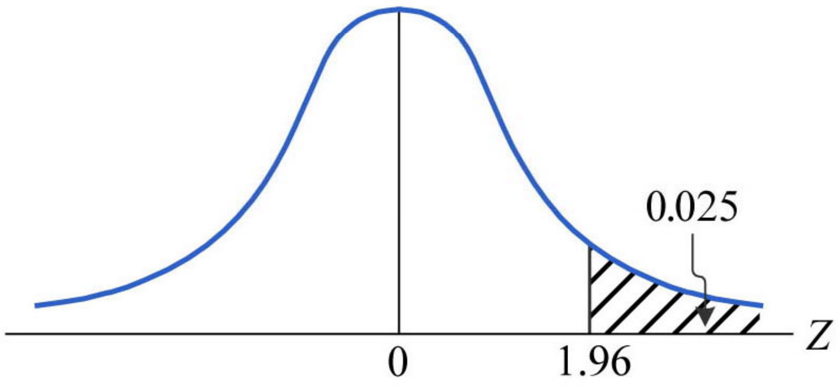
$$= 0.9750 - 0.0250 = 0.95$$



(c) $P(Z \geq 1.96) = 1 - P(Z \leq 1.96) = 1 - 0.9750 = 0.025$

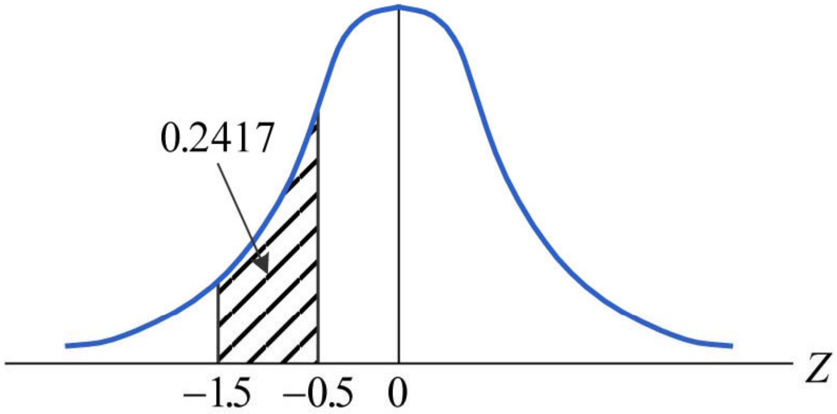
∵ 標準常態分配爲對稱分配，

∴ 亦可用對稱關係 $P(Z \leq -1.96) = P(Z \geq 1.96) = 0.025$



(d) $P(-1.5 \le Z \le -0.5) = P(Z \le -0.5) - P(Z \le -1.5)$

$$= 0.3085 - 0.0688 = 0.2417$$



例題 6-17

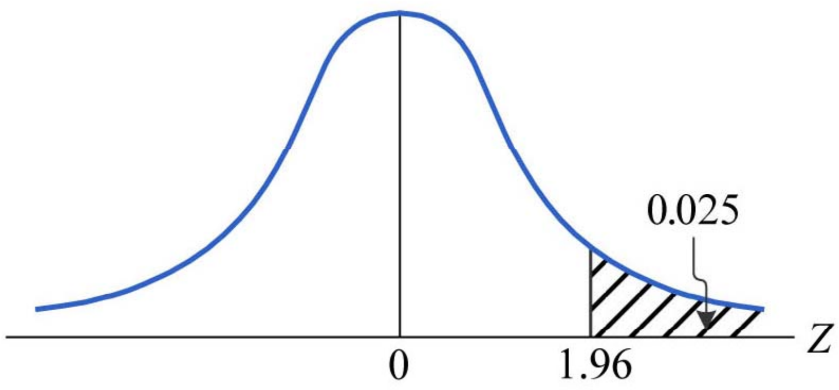
試求下列之 z 值

(a) $P(Z \geq z) = 0.025$

(b) $P(-z \leq Z \leq z) = 0.9$

解： (a) $P(Z \geq z) = 1 - P(Z \leq z) = 0.025$

$\therefore P(Z \leq z) = 1 - 0.025 = 0.975$，查表 $z = 1.96$



(b) $P(Z \le -z) = P(Z \ge z) = \dfrac{(1-0.9)}{2} = 0.05$

當 $z = 1.65$ 時， $P(Z \le -1.65) = 0.0495$ ，而 $z = 1.64$ 時，

$P(Z \le -1.64) = 0.0505$，而 0.05 是介於 0.0495 與 0.0505 之間，無法

直接查表，因此必須使用插補法求解，

z	P
-1.65	0.0495
$-z$	0.0500
-1.64	0.0505

$$\frac{-z-(-1.65)}{-1.64-(-1.65)} = \frac{0.0500-0.0495}{0.0505-0.0495} \Rightarrow z = 1.645$$

例題 6-18

設 X 為常態隨機變數，其分配之平均數 $\mu=20$，標準差 $\sigma=4$，試求下列機率

(a) $P(X<16)$

(b) $P(X>28)$

(c) $P(16<X<28)$

解： (a) $P(X<16)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{16-20}{4}\right)$ $\left(\text{由 } Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\text{ 轉換}\right)$

$$=P(Z<-1)$$

$$=0.1587$$

(b) $P(X>28)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{28-20}{4}\right)=P(Z>2)=1-P(Z<2)$

$$=1-0.9772=0.0228$$

(c) $P(16<X<28)=P\left(\frac{16-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{28-\mu}{\sigma}\right)$

$$=P\left(\frac{16-20}{4}<Z<\frac{28-20}{4}\right)=P(-1<Z<2)$$

$$=P(Z<2)-P(Z<-1)=0.9772-0.1587=0.8185$$

例題 6-19

全校 10,000 人參加會考，其成績為常態分配，平均數 = 500 分，標準差 = 50 分，試求符合下列條件之人數為若干？

(a) 500 分以上者。

(b) 未滿 350 分者。

(c) 400 分以上未滿 550 分者。

(d) 甲生成績 590 分，比甲生成績高的學生。

解：(a) $P(X>500)=P\left(Z>\frac{500-500}{50}\right)=P(Z>0)=0.5000$

$10{,}000\times 0.5000=5{,}000$（人）

(b) $P(X<350)=P\left(Z<\frac{350-500}{50}\right)=P(Z<-3)=0.0013$

$10{,}000\times 0.0013=13$（人）

(c) $P(400<X<550)=P\left(\frac{400-500}{50}<Z<\frac{550-500}{50}\right)$

$=P(-2<Z<1)=P(Z<1)-P(Z<-2)$

$=0.8413-0.0228=0.8185$

$10{,}000\times 0.8185=8{,}185$（人）

(d) $P(X>590)$

$=P\left(Z>\frac{590-500}{50}\right)=P(Z>1.8)=1-P(Z<1.8)$

$=1-0.9641=0.0359$

$10{,}000\times 0.0359=359$（人）

例題 6-20

甲班統計學成績平均成績 60 分，標準差 5 分，成績為常態分配，陳老師若希望有 15% 的學生給甲等，試問甲等最低分數為多少？

解：設甲等最低分數 X_0

$$P(X > X_0) = P\left(Z > \frac{X_0 - 60}{5}\right) = 0.15$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{X_0 - 60}{5}\right) = 0.15$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{X_0 - 60}{5}\right) = 0.85$$

$$\Rightarrow \frac{X_0 - 60}{5} = 1.04 \text{ (查表)}$$

$$\Rightarrow X_0 = 65.20 \text{ (分)}$$

6-10 間斷機率分配與常態分配的關係

例題 6-21

甲產品平均有 5% 屬不良品，今檢查 1,000 件，試求：

(a) 多於 60 件不合格的機率

(b) 少於 40 件不合格的機率

(c) 40 件至 60 件不合格的機率。

解： (a) 依二項分配求解

$$P(X \geq 60) = \sum_{X=60}^{1,000} C_X^{1,000} (0.05)^X (0.95)^{1,000-X}$$

$\because n$ 太大，無法查表，而 $P \leq 0.5$, $nP = 1,000 \times 0.05 \geq 5$ ，

$\therefore$ 以常態分配式代替二項分配計算。

$$\mu = nP = 1,000 \times 0.05 = 50$$

$$\sigma = \sqrt{nPq} = \sqrt{1,000 \times 0.05 \times 0.95} = 6.89$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 60) &= \sum_{X=60}^{1,000} C_X^{1,000} (0.05)^X (0.95)^{1,000-X} \\ &\approx P\left(Z > \frac{60 - 0.5 - 50}{6.89} \right) \\ &= P(Z > 1.38) = 1 - P(Z < 1.38) \\ &= 1 - 0.9162 = 0.0838 \end{aligned}$$

$$\text{(b)}\quad P(X \le 40) = \sum_{X=0}^{40} C_X^{1,000} (0.05)^X (0.95)^{1,000-X}$$

$$\approx P\left(Z < \frac{40+0.5-50}{6.89}\right) = P(Z < -1.38) = 0.0838$$

$$\text{(c)}\quad P(40 \le X \le 60) = \sum_{X=40}^{60} C_X^{1,000} (0.05)^X (0.95)^{1,000-X}$$

$$\approx P\left(\frac{40-0.5-50}{6.89} < Z < \frac{60+0.5-50}{6.89}\right)$$

$$= P(-1.52 < Z < 1.52)$$

$$= P(Z < 1.52) - P(Z < -1.52)$$

$$= 0.9357 - 0.0643 = 0.8714$$

例題 6-22

甲產品之不良率 0.4%，今抽取 1,500 件檢查，試求至多有 5 件不合格的機率為何？

解： 此例 $n=1{,}500$, $P=0.004$ ，是二項分配的特例，屬卜瓦松分配的類型，可以常態分配計算之 $(n>500)$ 。

$$\mu = nP = 1{,}500 \times 0.004 = 6$$

$$\sigma = \sqrt{nPq} = \sqrt{1{,}500 \times 0.004 \times 0.996} = 2.445$$

$$P(X \le 5) = P\left(Z < \frac{5+0.5-6}{2.445}\right) = P(Z < -0.20) = 0.4207$$

各項分配間的關係：