統 計 學

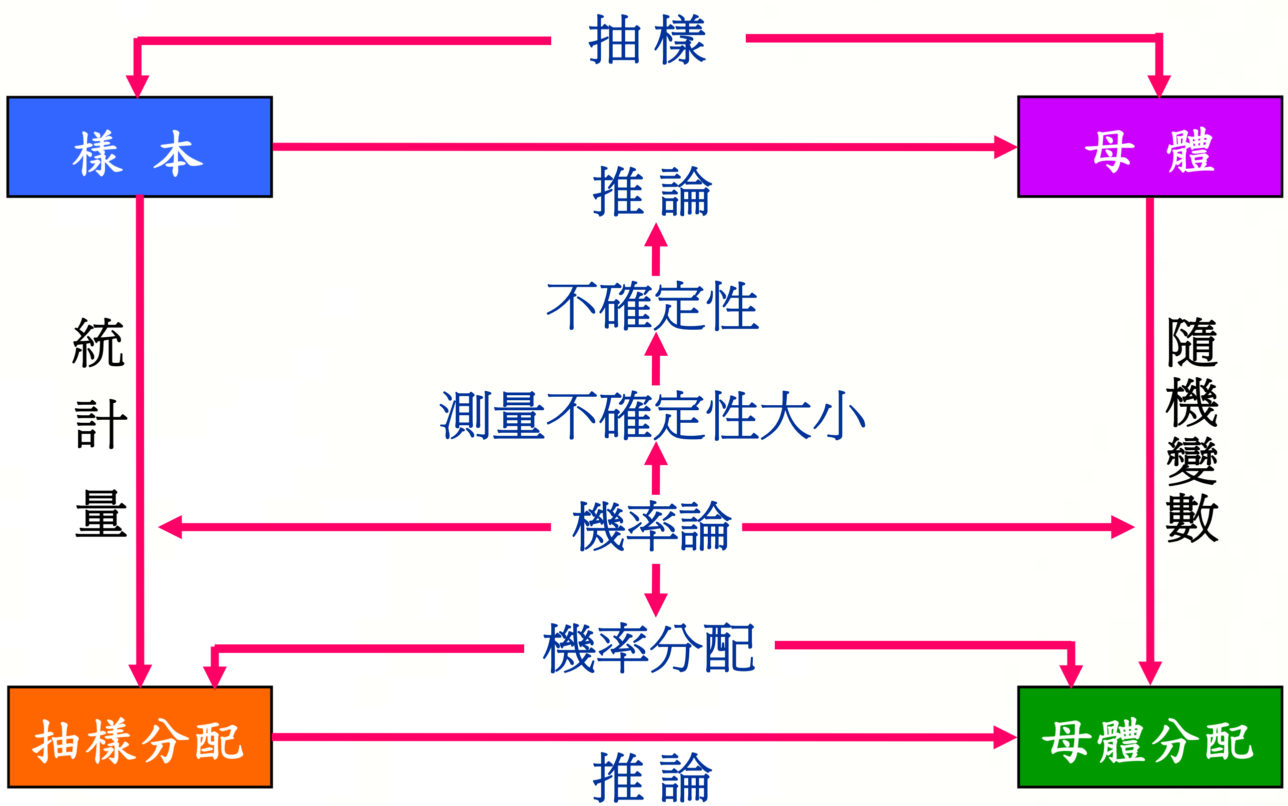
第五章 機率論與機率分配

書號：512282

編著 江建良

普林斯頓國際有限公司

5-1 機率定義的確立



5-1 機率定義的確立

- 隨機實驗
- 抽樣實驗
- 出　象
- 樣本點
- 樣本空間
- 事　件
- 由事件定義機率
- 機率定義：$P(A) = \dfrac{n}{N}$

例題 5-1

試舉二例說明隨機實驗之情況。

解：(a) 擲一粒骰子的實驗，是一個隨機實驗。

① 出現的可能結果有 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 六種情況，這六種情況在未試驗前已知，且不只一種情況。經多次試行，將出現此六種情況的規律性（最後各點均出現機率 $\frac{1}{6}$）。

② 試行一次，只會出現其中的一種情況，當然在未試行之前，無法知道那一點會出現。

③ 該試驗可在相同的情況下不斷的進行。

(b) 連續擲兩個銅板，是一個隨機實驗。

① 出現的結果有 {(反，反)；(正，反)；(反，正)；(正，正)} 四種情況，這四種情況是已知的，且不只一種情況。當試行一次無規律性，但試行多次後，將只會出現這四種情況的規律性。

② 但試行一次，只會出現其中一種結果，可是在未實驗前，無法確定那一種情況會出現。

③ 該試驗可在相同情況下 (如不斷的以同樣方式連續擲兩個銅板) 重覆出現。

例題 5-2

擲一個公正的骰子，試求：

(a) 樣本空間

(b) 出現奇數點的事件及其機率

(c) 出現偶數點的事件及其機率

(d) 出現點數爲7的事件及其機率

(e) 出現至少4點(含4點)以上的事件及其機率

(f) 出現奇數點或偶數點之事件及其機率。

解：(a) 樣本空間 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

(b) 出現奇數點的事件 $A=\{1,3,5\}$, $P(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

(c) 出現偶數點的事件 $B=\{2,4,6\}$, $P(B)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

(d) 出現點數為 7 的事件 $C=\phi$, $P(C)=0$ ，因為 7 點不可能出現。

(e) 出現至少 4 點（含 4 點）以上的事件 $D=\{4,5,6\}$, $P(D)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

(f) 出現奇數點或偶數點之事件 $E=S=\{1,2,3,4,5,6\}$, $P(E)=1$ ，即樣本空間。

5-2 機率的運算

機率的公理體系：

- **公理 1：** 任何事件A發生的機率必大於或等於0，即 $P(A)\geq 0$。
- **公理 2：** 設S為樣本空間（即全事件），則樣本空間所發生的機率必等於1，即 $P(S)=1$
- **公理 3：** 設 $A_1, A_2, \cdots$ 為互斥事件，則發生事件 A_1或事件 A_2或…之機率為個別事件之機率相加，即
$P(A_1 \cup A_2 \cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$

5-2 機率的運算

機率運算的定理：

- 定理 1：零事件的機率 $P(A)=P(\phi)=0$
- 定理 2：餘事件的機率 $P(A')=1-P(A)$
- 定理 3：事件機率所在範圍 $0 \le P(A) \le 1$
- 定理 4：機率的加法定理

  (1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  (2) 當 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 為互斥事件時，則

  $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$

- 定理 5：機率的乘法定理

  (1) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ 或

  $(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

  (2) 當 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 為獨立事件時，則

  $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$

例題 5-3

擲一個公正的骰子，試求下列事件發生的機率：

(a) A_1：出現點數 7。

(b) A_2：出現奇數點。

(c) A_3：出現偶數點。

(d) A_4：非出現奇數點。

(e) A_5：表示任一事件。

(f) A_6：奇數點與偶數點同時出現，即 $P(A_2 \cap A_3)$。

(g) A_7：奇數點或偶數點出現，即 $P(A_2 \cup A_3)$。

解：(a) $P(A_1)=0$，即所謂的零事件，因為點數 7 不可能出現。

(b) $P(A_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(c) $P(A_3)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(d) $P(A_4)=1-P(A_2)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，因為非奇數點，即偶數點，兩者為餘事件。

(e) $P(A_5)$ 的機率為 $0\le P(A_5)\le 1\left(P(A_5)=\frac{1}{6}\right)$

(f) $P(A_2\cap A_3)=0$，因為 A_2 與 A_3 為互斥事件，不可能同時發生。

(g) $P(A_2\cup A_3)=P(A_2)+P(A_3)-P(A_2\cap B_3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0=1$

因為樣本空間出現的點數不是奇數就是偶數，所以機率為 1。

例題 5-4

若 A、B 為兩任意事件，且 $P(A)=0.5$, $P(B)=0.6$, $P(A\cap B)=0.3$，試求下列機率：

(a) $P(A')$　　(b) $P(A\cup B)$

(c) $P(A'\cap B')$　　(d) $P(B\mid A)$

(e) 事件 A、B 是否獨立？

解：(a) $P(A')=1-P(A)=1-0.5=0.5$

(b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.5+0.6-0.3=0.8$

(c) $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-0.8=0.2$

(d) $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0.3}{0.5}=0.6=P(B)$

(e) $P(B\mid A)=0.6=P(B)$, $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.3}{0.6}=0.5=P(A)$

且 $P(A\cap B)=0.3=P(A)\cdot P(B)=0.5\times 0.6=0.3$

$\therefore A, B$ 爲獨立事件

例題 5-5

台塑公司員工一百名，按其教育程度與性別分類如下：

教育程度 / 性別	大專 (C)	非大專 (N)
男性 (M)	32	20
女性 (F)	25	23

試求下列事件的機率：

(a) 大專男性的機率。

(b) 非大專女性的機率。

(c) 大專程度的機率。

(d) 男性的機率。

(e) 張先生是大專畢業的機率。

(f) 性別與教育程度是否獨立。

解：(a) $P(C\cap M)=\dfrac{32}{100}=32\%$

(b) $P(N\cap F)=\dfrac{23}{100}=23\%$

(c) $P(C)=\dfrac{32+25}{100}=\dfrac{57}{100}=57\%$

(d) $P(M)=\dfrac{32+20}{100}=\dfrac{52}{100}=52\%$

(e) $P(\text{大專}\,|\,\text{男性})=P(C\,|\,M)=\dfrac{P(C\cap M)}{P(M)}=\dfrac{\frac{32}{100}}{\frac{52}{100}}=61.5\%$

(f) $P(M)\cdot P(C)=\dfrac{52}{100}\cdot\dfrac{57}{100}=0.2964\neq P(M\cap C)=0.32$

$\therefore$ 性別與教育程度不獨立。

例題 5-6

陳先生看某電視節目的機率為0.6，陳太太看該節目為0.4，已知陳太太看該節目，陳先生亦看的機率為0.8，試求夫婦兩人中至少有一人看該節目的機率有多少？

解： $P(A)=0.6\,,\,P(B)=0.4\,,\,P(A|B)=0.8$

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)=0.4\cdot 0.8=0.32$$

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=0.6+0.4-0.32\\&=0.68=68\%\end{aligned}$$

5-3 貝氏定理

- 貝氏定理的內容：

  - 簡單的兩事件：

事前機率　條件機率 (額外訊息)

$$\underbrace{P(A|B)}_{\text{事後機率}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\overbrace{P(A)}^{\text{事前機率}} \cdot \overbrace{P(B|A)}^{\text{條件機率 (額外訊息)}}}{P(B)}$$

事後機率

  - 一般模式的貝氏定理：

$$P(A_K|B) = \frac{P(A_K \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_K)P(B|A_K)}{\sum_{i=1}^{S} P(A_i)P(B|A_i)}$$

例題 5-7

台泥公司用 A_1 及 A_2 兩部機器來製造產品，已知 A_1 機器生產全部產品的40%， A_2 生產佔全部產品的60%，若能獲得額外的資訊，知道 A_1 和 A_2 兩部機器所生產的產品不良率為4% 及5%，試求：

(a) 由全部產品中任意抽出一件，其為不良品的機率。

(b) 已知其為不良品，計算此產品來自 A_1 機器的機率。

解：(a) 我們可依題意，先繪出樹枝圖（設B為不良品）

機器

$P(A_1)=0.4$

不良品 $P(B|A_1)=0.04 \rightarrow P(A_1)P(B|A_1)=0.4\times 0.04=0.016$

良品 $P(B'|A_1)=0.96$

$P(A_2)=0.6$

不良品 $P(B|A_2)=0.05 \rightarrow P(A_2)P(B|A_2)=0.6\times 0.05=0.03$

良品 $P(B'|A_2)=0.95$

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1)\cdot P(B\,|\,A_1)+P(A_2)\cdot P(B\,|\,A_2)\\
&= 0.016+0.03\\
&= 0.046
\end{aligned}
$$

(b) $P(A_1 \mid B) = \dfrac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(B)} = \dfrac{0.016}{0.046} = 34.78\%$

(c) 我們亦可將貝氏定理列成下表

① 事件 A_i	② 事前機率 $P(A_i)$	③ 條件機率 $P(B \mid A_i)$	④ 聯合機率 $P(A_i \cap B)$	⑤ 事後機率 $P(A_i \mid B)$
A_1	0.4	0.04	0.016	0.016/0.046=0.3478
A_2	0.6	0.05	0.030	0.03/0.046=0.6522
	1.0		0.016	1.0000

由本表我們更容易看出，若我們不獲得額外資料的機率，則對不良品來自 A_1 機器的機率判斷爲 $P(A_1) = 0.4$ (事前機率)，但有額外資訊 (以條件機率 $P(B \mid A_1) = 0.04$ 表示) 加入後，則對不良品來自 A_1 機器的機率，修正爲 $P(A_1 \mid B) = 0.3478$ (事後機率)。

例題 5-8

小明可搭乘 A_1，A_2，A_3，A_4 四路車到學校上學，搭車的比例分別爲40%、30%、20%、10%，而遲到的機率依次爲1.0%、2.0%、1.6%、1.4%，假設今天早上遲到了，則小明搭上 A_3 車上學的機率爲何？

解：(a) 若本題無額外的遲到資訊，我們很自然地會利用事前機率求解，即 $P(A_3)=20\%=0.2$。

(b) 若我們利用“遲到的資訊”，則爲

$$P(A_3\,|\,B)=\frac{P(A_3)P(B\,|\,A_3)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B\,|\,A_i)}$$

$$=\frac{0.2\times0.016}{0.4\times0.01+0.3\times0.02+0.2\times0.016+0.1\times0.014}$$

$$=\frac{0.0032}{0.0146}$$

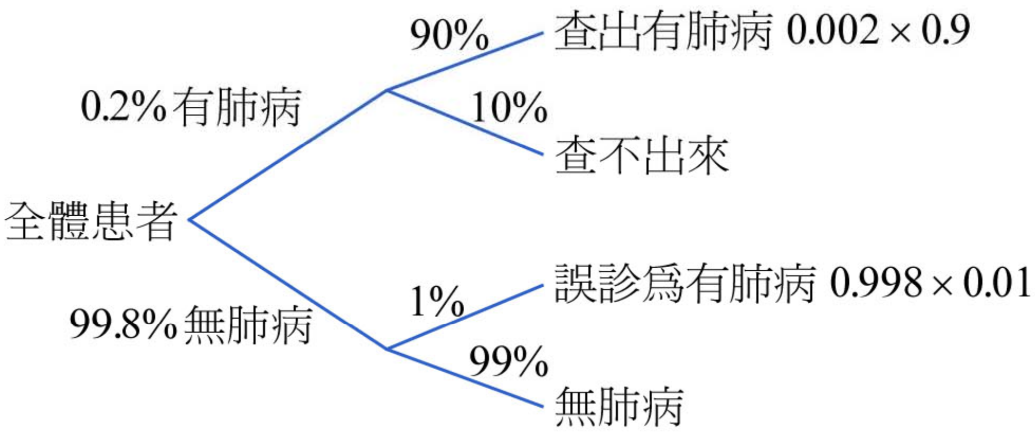
$$=0.2192$$

(c) 原先之事前機率爲0.2，經遲到資訊的加入，機率修正爲0.2192（事後機率）。

例題 5-9

台大醫院以 X 光檢查肺病之資料如下，設全體患者中有 0.2% 有肺病，而有肺病者 90% 可查出，無肺病者 1% 會誤診為有肺病，試求自全體患者中任取一名，以 X 光檢查，結果有肺病，而此人確實有肺病的機率為何？

解： (a) 先繪製樹枝圖，以了解題目



(b) 設 A 爲此人自有肺病患者選出之事件，B 爲此人自 X 光中呈現肺病之事件。

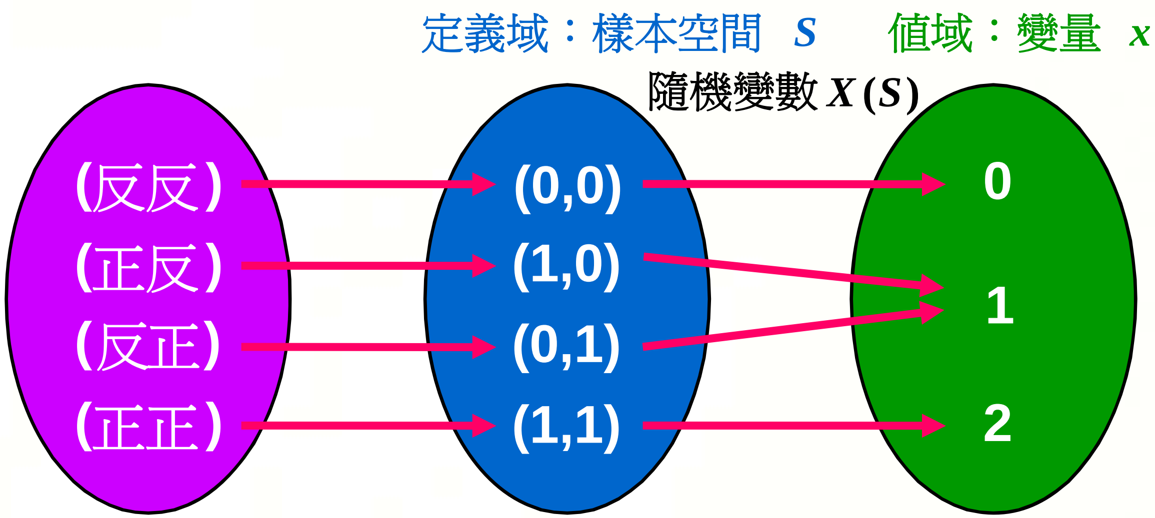
$$
\begin{aligned}
P(A \mid B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A) + P(A')P(B \mid A')} \\
&= \frac{0.002 \times 0.9}{0.002 \times 0.9 + 0.998 \times 0.01} \\
&= \frac{0.0018}{0.01178} \\
&= 0.1528
\end{aligned}
$$

5-4 隨機變數與機率分配

隨機變數的意義：

隨機變數 (random variable)，係指定義於樣本空間的一個實數函數。

隨機變數的例子：



例題 5-10

試就下列隨機實驗，寫出一個隨機變數（讀者自訂）及其變量（可能出現的數值）。

(a) 擲一個銅板四次

(b) 擲一個骰子一次

(c) 一箱子有 5 個球，2 白 3 紅，設採不放回抽樣

(d) 中山路口下個月發生車禍的次數

(e) 聲寶牌電視機的壽命

解：因爲隨機變數代表事件，所以可依研究者需要自訂。

(a) 令 X 表示出現正面的次數，其變量 $x=0,1,2,3,4$。

(b) 令 Y 表示出現的點數，其變量 $y=1,2,3,4,5,6$。

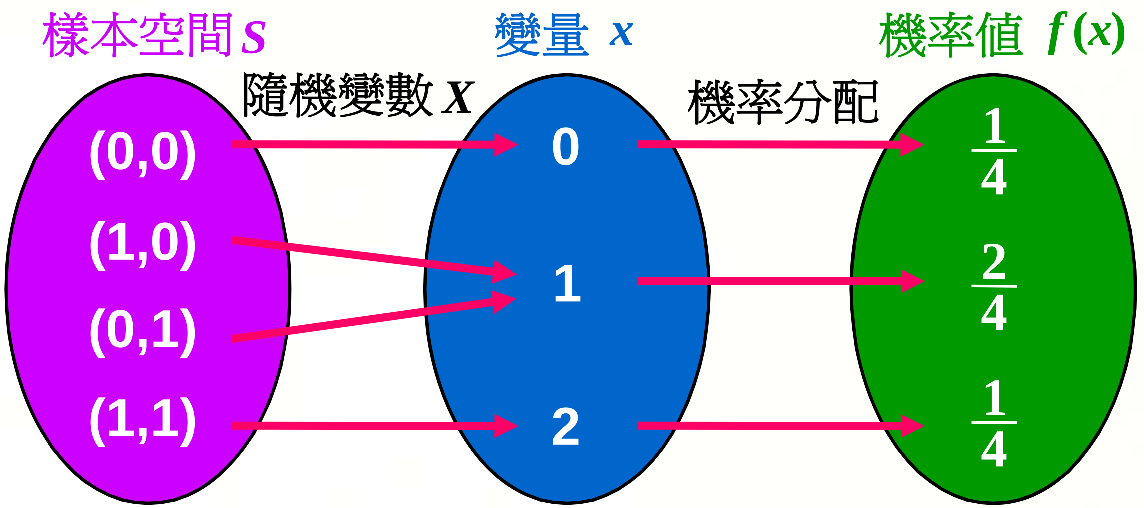
(c) 令 Z 表示出現的白球個數，其變量 $z=0,1,2$。

(d) 令 T 表示中山路口下個月發生車禍的次數，其變量 $t=0,1,2,3,\cdots$。

(e) 令 W 表示聲寶牌電視機的壽命長度，其變量 $w\geq 0$。

5-4 隨機變數與機率分配

- **隨機變數的種類：**
  - 間斷隨機變數。
  - 連續隨機變數。
- **機率分配：**
  - 機率分配的意義：



5-4 隨機變數與機率分配

機率分配：

機率分配的種類：

(1) 間斷機率分配。　(2) 連續機率分配。

機率分配的功用：

(1) 利用機率分配測量不確定性的大小。

(2) 利用機率分配建立機率表，便於機率的求算。

(3) 利用機率分配，建立推論統計的理論。

例題 5-11

擲一個骰子一次，令 X 表示其出現的點數，試列表、繪圖、函數式以表示其機率分配。

解：(a) 列表

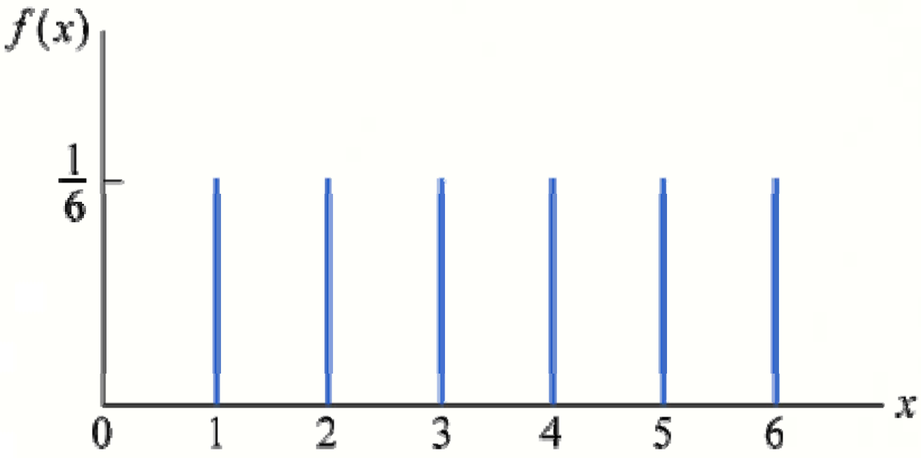
X	1	2	3	4	5	6	總計
$f(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

因爲一個骰子有六面，每一個點數出現的機率均等，故機率均爲 1/6。上表符合機率分配的條件，即

① $0 \le f(x_i) = \dfrac{1}{6} \le 1$

② $\displaystyle\sum_{i=1}^{K} f(x_i) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$

(b) 繪圖



(c) 函數

$$f(x) = \frac{1}{6} \quad , \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

或

$$= 0 \qquad x = \text{其他情況}$$

例題 5-12

設一機率分配，如下表所示：

X	0	1	2	3
$f(x)$	0.2	0.1	0.4	A

試求 (a) A 值；(b) $P(x \le 2)$；(c) $P(1 \le x \le 3)$。

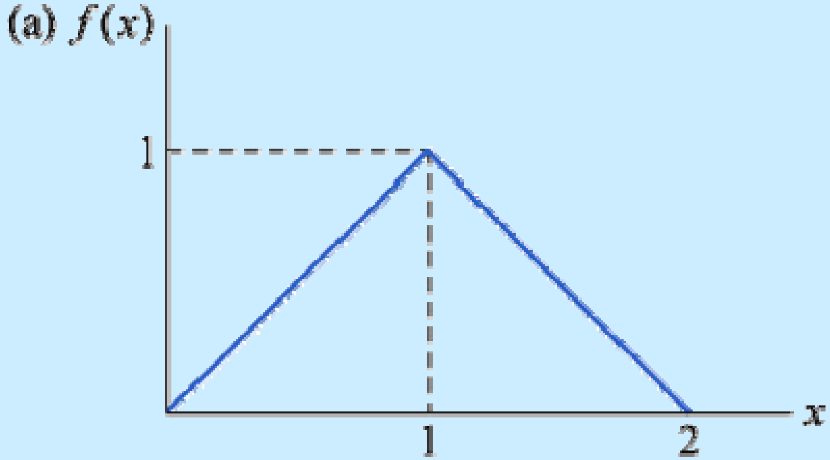
解：(a) $\because 0.2+0.1+0.4+A=1$, $\therefore A=0.3$

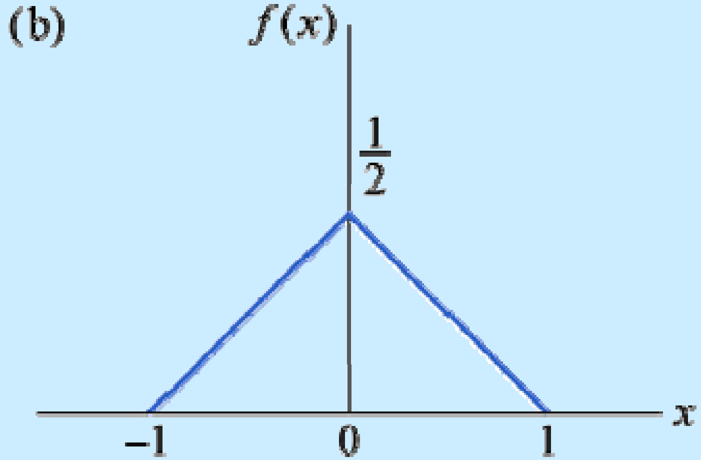
(b) $P(x \le 2)=f(0)+f(1)+f(2)=0.2+0.1+0.4=0.7$

(c) $P(1 \le X \le 3)=f(1)+f(2)+f(3)=0.1+0.4+0.3=0.8$

例題 5-13

試判斷下列圖形何者為連續機率分配？





解：(a) 是連續機率分配，因爲 $f(x) \geq 0$ 且三角形下之面積 $= 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$。

(b) 不是連續機率分配，因爲 $f(x)$ 有一半面積（左半面積）< 0，不符合連續機率分配的條件。

例題 5-14

設有一機率分配為：

$$f(x)=\frac{x}{18}\quad,\quad 0\le x\le 6$$

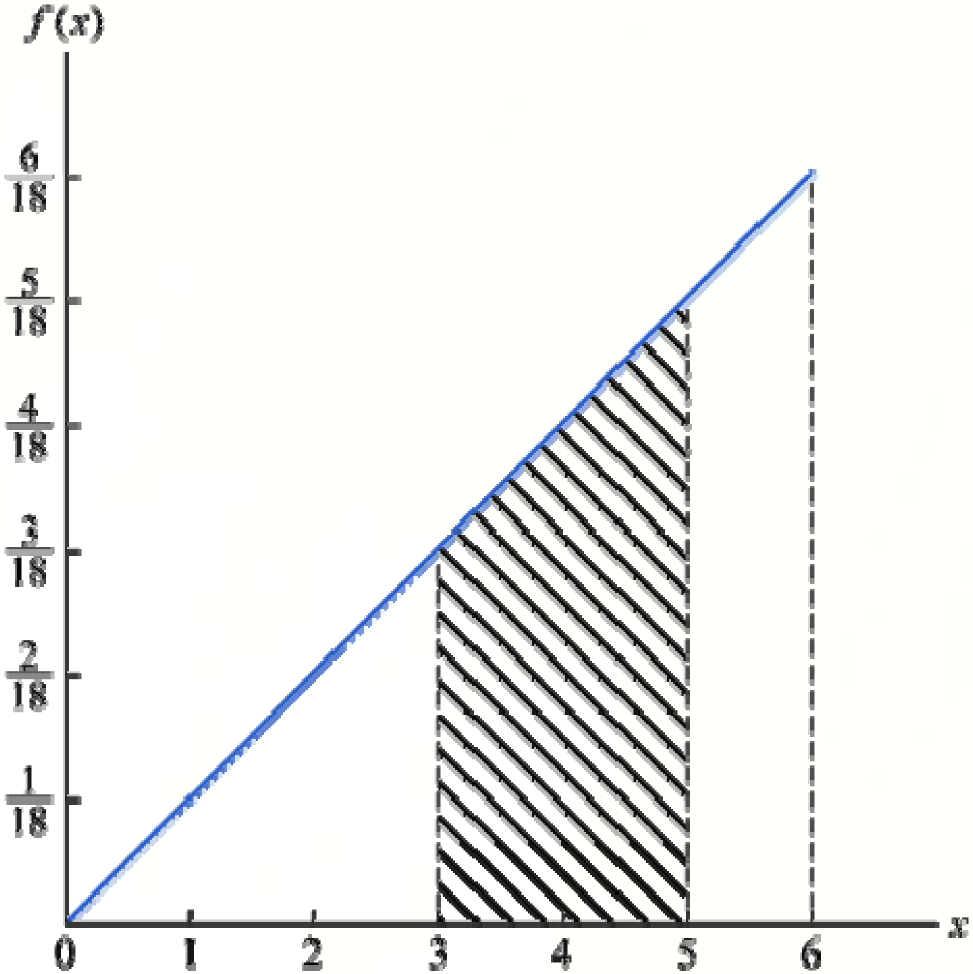
或

$$=0\quad,\quad 其他情況$$

試求 (a) $P(3\le x\le 5), P(3<x<5)$；(b) $P(x<3)$；

(c) $P(x>3)$；(d) 證明 $P(0<x<6)=1$

解：1. 先以圖形表示該分配（因為該分配之隨機變數為連續 $0 \le x \le 6$，故為連續機率分配）



2. (a) ① $P(3 \leq x \leq 5)$ = 梯形面積 = (上底 + 下底) × 高 ÷ 2

$$= \left(\frac{3}{18} + \frac{5}{18}\right) \times (5-3) \div 2 = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

② $P(3 < x < 5) = P(3 \leq x \leq 5) = \frac{4}{9}$ (∵ x 爲連續變量)

(b) $P(x < 3)$ = 三角形面積 $= 3 \times \frac{3}{18} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(c) $P(x > 3) = 1 - P(x < 3) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(d) $P(0 < x < 6) = 6 \times \frac{6}{18} \times \frac{1}{2} = 1$

5-5 期望值與變異數

期望值：

期望值的意義：

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in X(S)} x \cdot f(x) = \sum x f(x)$$

期望值的性質：

(1) 設 b 為常數，則 b 之期望值 $E(b) = b$

(2) 設 X 為一隨機變數，a 為一常數，則 $E(aX) = aE(X)$

(3) $E(aX + b) = aE(X) + b$

P143

例題 5-15

連續擲兩個銅板一次，以隨機變數 X 表示出現的正面數，其機率分配如下：

$X=x$	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

試求 (a) $E(X)$；(b) $E[X-E(X)]^2$；(c) $E(4X-1)$。

解：(a) $E(X)=\sum x\cdot f(x)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}=1$

(b) $E[x-E(X)]^2=(0-1)^2\left(\frac{1}{4}\right)+(1-1)^2\left(\frac{2}{4}\right)+(2-1)^2\left(\frac{1}{4}\right)$

$$=\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

(c) $E(4X-1)=E(4X)-E(1)=4E(X)-1=4\times1-1=3$

例題 5-16

台塑公司擬就兩投資方案進行抉擇，得知 A 方案之可能淨利為 200,000 元，300,000 元或 500,000 元之機率分別為 0.2，0.4 及 0.4；B 方案成功之淨利 1,200,000 元，失敗之淨利為零，成功的機率為 0.5，試問就期望值的觀點而言，該公司應採那一方案？

解：分別求兩方案之期望淨利如下：

$$E(A) = 200{,}000(0.2) + 300{,}000(0.4) + 500{,}000(0.4) = 360{,}000\,(\text{元})$$

$$E(B) = 1{,}200{,}000(0.5) + 0(0.5) = 600{,}000\,(\text{元})$$

故依期望值觀點，該公司應採用期望淨利較大之 B 方案。

5-5 期望值與變異數

變異數：

變異數的意義：

$$\mathrm{Var}(X) = V(X) = \sigma_x^2$$
$$= E[X - E(X)]^2$$
$$= E[(X-\mu)^2]$$
$$= \sum (X-\mu)^2 \cdot f(x)$$

變異數的性質：

(1) 設 b 為常數，則 b 之變異數 $V(b) = 0$

(2) 設 a 為一常數，則 $V(ax) = a^2 V(x)$

(3) 設隨機變數 X 之期望值與變異數分別為 $E(X), V(X)$
設 $Y = ax + b$，a、b 為常數，則 $V(Y) = V(ax+b) = a^2 V(x)$

例題 5-17

擲一個銅板三次，令 X 表示其出現正面的次數，其機率分配如下：

$X=x$	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

試求：

(a) $V(X)$；(b) $V(4X)$；(c) $V(4X-1)$；(d) $V(2X+5)$；(e) $\sigma(X)$。

解：(a) ① 先求 $E(X)=\sum x\cdot f(x)=0\left(\frac{1}{8}\right)+1\left(\frac{3}{8}\right)+2\left(\frac{3}{8}\right)+3\left(\frac{1}{8}\right)=1.5$

② $V(X)=E[X-E(X)]^2$

$$=(0-1.5)^2\cdot\frac{1}{8}+(1-1.5)^2\cdot\frac{3}{8}(2-1.5)^2\cdot\frac{3}{8}+(3-1.5)^2\cdot\frac{1}{8}$$

$$=0.75$$

另解：$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$$=\sum x^2\cdot f(x)-[E(X)]^2$$

$$=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}-(1.5)^2$$

$$=3-(1.5)^2$$

$$=0.75$$

(b) $V(4X)=4^2V(X)=16\times 0.75=12$

(c) $V(4X-1)=4^2V(X)=16\times 0.75=12$

(d) $V(2X+5)=2^2V(X)=4\times 0.75=3$

(e) $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.75}=0.87$

由 (b)、(c) 計算可知，變異數只會受隨機變數影響，而不會受常數項影響。

例題 5-18

設機率函數 $f(x)>0, x=-1,0,1$，試求：

(a) 若 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，求 $E(X^2)$。

(b) 若 $f(0)=\dfrac{1}{2}, E(X)=\dfrac{1}{6}$，求 $f(-1)$ 與 $f(1)$

(c) $E(X^3)$ 與 $V(X)$

解： (a) $\because E(X^2)=\sum x^2\cdot f(x)$

$$=(-1)^2\cdot f(-1)+0^2\cdot f(0)+1^2\cdot f(1)$$

$$=f(-1)+f(1)$$

而機率分配之機率值總和必為 1

$\therefore f(-1)+f(0)+f(1)=1\Rightarrow E(X^2)=f(-1)+f(1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(b) $\because E(X)=\sum x\cdot f(x)$

$$=(-1)\cdot f(-1)+(0)\cdot f(0)+(1)\cdot f(1)$$

$$=-f(-1)+f(1)$$

$$=\frac{1}{6}$$

而由 (a) 知 $f(-1)+f(1)=\frac{1}{2}$

$\therefore 2f(1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}\Rightarrow f(1)=\frac{1}{3}$ ， $f(-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

(c) 由 (a)、(b) 資料，將機率函數 $f(x)$ 列表如下：

$X=x$	-1	0	1
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X^3)=\sum X^3\cdot f(x)=(-1)^3\left(\frac{1}{6}\right)+0^3\left(\frac{1}{2}\right)+1^3\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{17}{36}$$

例題 5-19

設 X 為隨機變數，$E(X)=\mu, V(X)=\sigma^2$，令 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$

試求 (a) $E(Z)=?$ $V(Z)=?$

(b) 若 $Y=\dfrac{Z}{3}-2$，求 $E(Y)=?$ $V(Y)=?$

解：(a) $E(Z)=E\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{\sigma}E(X-\mu)$

$=\dfrac{1}{\sigma}[E(X)-\mu]=0$ $(\because \sigma$ 與 μ 爲常數項)

$V(Z)=V\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{\sigma^2}V(X-\mu)=\dfrac{1}{\sigma^2}V(X)=1$

(b) $E(Y)=E\left(\dfrac{Z}{3}-2\right)=\dfrac{1}{3}E(Z)-2=\dfrac{1}{3}\times 0-2=-2$

$V(Y)=V\left(\dfrac{Z}{3}-2\right)=\dfrac{1}{3^2}V(Z)=\dfrac{1}{9}$

[註：本例 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$，稱爲標準隨機變數，其期望值爲 0，變異數爲 1，我們在第 6 章會加以說明。]

5-6 謝氏定理之重述

例題 5-20

試就下列資料計算 $E(X)$ 和 $V(X)$，並利用 $f(x)$ 找出全體資料落在此區間內的比例，將其與 Chebyshev 定理作比較。

$X=x$	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

解：(a) 先算 $E(X)=1.5, V(X)=0.75, \sigma(X)=0.87$ （詳見例題 5-17 之計算）

(b) 利用本題資料求算機率並與 Chebyshev 定理比較

① $P(\mu-\sigma<x<\mu+\sigma)=P(0.63<x<2.37)=f(1)+f(2)=\dfrac{6}{8}>0$

② $P(\mu-2\sigma<x<\mu+2\sigma)=P(-0.24<x<3.24)$

$=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=1\geq 1-\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{3}{4}=0.75$

③ $P(\mu-3\sigma<x<\mu+3\sigma)=P(-1.11<x<4.11)$

$=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=1\geq 1-\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{8}{9}=0.89$

故 Chebyshev 定理驗證成立。

5-7 聯合機率分配

例題 5-21

設 X、Y 為隨機變數，其聯合機率分配如下表所示：

X \ Y	0	1	2
0	0.2	0.1	0.2
1	0.1	0.1	0.3

試求 (a) X、Y 的邊際機率分配

(b) $f(Y|X=1)$

(c) X 與 Y 是否獨立

解：(a) ① X的邊際機率分配

X	0	1	2	總計
$f(x)$	0.3	0.2	0.5	1

② Y的邊際機率分配

Y	0	1	總計
$f(y)$	0.5	0.5	1

(b)

Y	$f(Y \mid X=1)$	總計
0	0.5	1
1	0.5	

$f(y \mid x=1)$，當 $y=0$ 時，

$$f(y=0 \mid x=1)=\frac{f(1,0)}{f(x=1)}=\frac{0.1}{0.2}=\frac{1}{2}=0.5$$

當 $y=1$ 時，$f(y=1 \mid x=1)=\dfrac{f(1,1)}{f(x=1)}=\dfrac{0.1}{0.2}=\dfrac{1}{2}=0.5$

(3) $\because f(x=0)=0.3, f(y=0)=0.5$，而 $f(0,0)=0.2$

$\Rightarrow f(x=0)\times f(y=0)=0.3\times 0.5=0.15\neq f(0,0)=0.2$

$\therefore X$ 與 Y 不獨立。

例題 5-22

試就上例題 5-21 求算：

(a) $E(X), V(X)$。

(b) $E(Y), V(Y)$。

(c) $\mathrm{COV}(X, Y)$。

(d) 相關係數

(e) $E(Y \mid X=1), V(Y \mid X=1)$

(f) $E(2X+3Y), V(2X+3Y)$

解：(a) $E(X)=\sum xf(x)=0(0.3)+1(0.2)+2(0.5)=1.2$

$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0^2(0.3)+1^2(0.2)+2^2(0.5)-(1.2)^2=0.76$

(b) $E(Y)=\sum y\cdot f(y)=0(0.5)+1(0.5)=0.5$

$V(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=0^2(0.5)+1^2(0.5)-(0.5)^2=0.25$

(c) $\text{COV}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\sum xyf(x,y)-E(X)E(Y)$

$$=[0(0)(0.2)+0(1)(0.1)+0(2)(0.2)+1(0)(0.1)+1(1)(0.1)+1(2)(0.3)]-(1.2)(0.5)$$

$$=0.7-0.6=0.1$$

(d) 相關係數 $=\rho=\dfrac{\text{COV}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\dfrac{0.1}{\sqrt{0.76}\sqrt{0.25}}=\dfrac{0.1}{0.4359}=0.23$

表示兩隨機變數呈正相關

(e) $E(Y|X=1)=\sum y\cdot f(y|x)=0\times0.5+1\times0.5=0.5$

$V(Y|X=1)=\sum[y-E(Y|X)]^2\cdot f(y|x)$

$$=(0-0.5)^2(0.5)+(1-0.5)^2(0.5)=0.25$$

(f) $E(2X+3Y)=2E(X)+3E(Y)=2(1.2)+3(0.5)=3.9$

$V(2X+3Y)=2^2V(X)+3^2V(Y)+2(2)(3)(0.1)$

$$=4(0.76)+9(0.25)+2(2)(3)(0.1)$$

$$=6.49$$

例題 5-23

下列是十對夫妻，其每月的收入資料（以千元為單位）

對　　數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X（丈夫收入）	10	15	15	10	10	15	20	15	20	20
Y（妻子收入）	5	15	10	10	10	5	10	10	15	10

試求 (a) X、Y 的聯合機率分配。

(b) X、Y 的邊際機率分配。

(c) $E(X), E(Y), V(X), V(Y)$。

(d) 相關係數及代表的意義。

(e) $E(X-Y), V(X-Y)$。

(f) 若 $W=0.4X+0.6Y$，求 $E(W), V(W)$。

(g) $E(Y|X=20), V(Y|X=20)$

(h) X 與 Y 是否獨立？

解：(a)

X / Y	10	15	20	$f(y)$
5	0.1	0.1	0.0	0.2
10	0.2	0.2	0.2	0.6
15	0.0	0.1	0.1	0.2
$f(x)$	0.3	0.4	0.3	1

(b) ①

$X = x$	10	15	20
$f(x)$	0.3	0.4	0.3

②

$Y = y$	5	10	15
$f(y)$	0.2	0.6	0.2

(c) $E(X) = 10(0.3) + 15(0.4) + 20(0.3) = 15$

$E(Y) = 5(0.2) + 10(0.6) + 15(0.2) = 10$

$V(X) = 10^2(0.3) + 15^2(0.4) + 20^2(0.3) - (15)^2 = 15$

$V(Y) = 5^2(0.2) + 10^2(0.6) + 15^2(0.2) - (10)^2 = 10$

(d)
$$\begin{aligned} E(XY) &= (10)(5)(0.1) + (15)(5)(0.1) + (20)(5)(0.0) + (10)(10)(0.2) \\ &\quad + (15)(10)(0.2) + (20)(10)(0.2) + (10)(15)(0.0) \\ &\quad + (15)(15)(0.1) + (20)(15)(0.1) \\ &= 155 \end{aligned}$$

$\mathrm{COV}(X, Y) = 155 - (15)(10) = 5$

$\rho = \dfrac{5}{\sqrt{15}\sqrt{10}} = \dfrac{5}{12.25} = 0.41$ （ 正相關 ）

(e) $E(X-Y)=E(X)-E(Y)=15-10=5$

$$V(X-Y)=V(X)+V(Y)-2\mathrm{COV}(X,Y)$$
$$=15+10-2(5)$$
$$=15$$

(f) $E(W)=E(0.4X+0.6Y)$

$$=0.4E(X)+0.6E(Y)$$
$$=0.4(15)+0.6(10)$$
$$=12$$

$$V(W)=V(0.4X+0.6Y)$$
$$=(0.4)^2(15)+(0.6)^2(10)+2(0.4)(0.6)(5)$$
$$=8.4$$

(g)

y	$f(y \mid x = 20)$
5	0
10	$\frac{2}{3}$
15	$\frac{1}{3}$

$$E(Y \mid x = 20) = 5(0) + 10\left(\frac{2}{3}\right) + 15\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{35}{3} = 11.67$$

$$V(Y \mid x = 20) = (5 - 11.67)^2(0) + (10 - 11.67)^2 \cdot \frac{2}{3} + (15 - 11.67)^2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= 0 + 1.86 + 3.70$$

$$= 5.56$$

(h) $\because f(x,y) \neq f(x)f(y)$，如 $f(10,5) = 0.1 \neq f(10) \times f(5) = 0.3 \times 0.2 = 0.06$

$\therefore$ 不獨立。