

統計學

第四章 統計資料之分析解釋(二)

4-1 差異量數

4-2 全距

4-3 四分位差

4-4 平均差

4-5 標準差

4-6 分組資料差異量數之計數

4-7 平均數與標準差的應用

4-8 動差

4-9 偏態係數

4-10 峰態係數

書號：512282

編著 江建良



普林斯頓國際有限公司

4-1 差異量數

- 差異量數的意義與作用：

以一個數字來表達一群統計資料內數值差異程度的量數，稱為**差異量數**。

- 差異量數的種類：

- ✚ 非離中差異量數：如全距。

- ✚ 離中差異量數：
 1. 四分位差。
 2. 平均差。
 3. 標準差。



例題 4-1

甲組成績：50, 50, 50, 50

乙組成績：0, 100, 0, 100

試以平均數與差異量數的觀點，討論甲乙兩組成績的意義。

解： (a) 先計算平均數：

$$\text{甲組：}\mu_{\text{甲}} = \frac{50 + 50 + 50 + 50}{4} = 50$$

$$\text{乙組：}\mu_{\text{乙}} = \frac{0 + 100 + 0 + 100}{4} = 50$$

兩組平均數相同。

(b) 雖然甲乙兩組的平均數相同，但我們從原始資料觀察，甲組每個成績均為50分，毫無差異，但乙組每個成績差異甚大（有0分，有100分）。由此我們可知，要了解統計資料的特徵，除了了解平均數外，差異量數的測定，亦為重要。否則平均數的代表性大小無法獲知。



4-2 全距

● 全距的計算方式：

$$R = X_{\max} - X_{\min}$$

其中 $X_{\max}$ = 一群數值中之最大值

$X_{\min}$ = 一群數值中之最小值

例題 4-2

五位學生的體重為60, 70, 52, 68, 82公斤，求全距。

解： $R = X_{\max} - X_{\min} = 82 - 52 = 30$ (公斤)



4-3 四分位差

- 四分位差的計算方式：

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$



例題 4-3

試求15, 18, 18, 20, 21, 25, 30, 31, 35, 40之四分位差。

解：(a) 先求 Q_1 與 Q_3 (原題目已由小到大排序)

$$Q_1 \text{ 在第 } \frac{n}{4} + \frac{1}{2} = \frac{10}{4} + \frac{1}{2} = 3 \text{ 項} \Rightarrow Q_1 = 18$$

$$Q_3 \text{ 在第 } \frac{3n}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3 \times 10}{4} + \frac{1}{2} = 8 \text{ 項} \Rightarrow Q_3 = 31$$

(b) 代入公式

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 31 - 18 = 13$$

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{31 - 18}{2} = 6.5$$



4-4 平均差

● 平均差的計算方式：

✚ 離中差方式：
$$\text{M.D.} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_i - M_e| = \frac{1}{N} \sum |X - M_e|$$

✚ 離均差方式：

(1) 母體資料：
$$\text{M.D.} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_i - \mu| = \frac{1}{n} \sum |X - \mu|$$

(2) 樣本資料：
$$\text{M.D.} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}| = \frac{1}{n} \sum |X - \bar{X}|$$



例題 4-4

試求下列五數之平均差 (設為母體資料)

30, 33, 38, 34, 40

解：(a) 先離中差方式求算：

① 先求 M_e

按大小順序排列 30, 33, 34, 38, 40

可知 $M_e = 34$

$$\text{② } M.D. = \frac{1}{N} \sum |X - M_e| = \frac{1}{5} (4 + 1 + 0 + 4 + 6) = 3$$

(b) 以離均差方式求算：

① 先求 μ

$$\mu = \frac{1}{5} (30 + 33 + 38 + 34 + 40) = 35$$

$$\text{② } M.D. = \frac{1}{N} \sum |X - \mu| = \frac{1}{5} (5 + 2 + 3 + 1 + 5) = 3.2$$

(c) 由 (a)、(b) 可知，以離中差方式求算之平均差比以離均差方式求算之平均差小。



4-5 標準差

● 標準差的計算方式：

✚ 母體資料：

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (X - \mu)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - (\mu)^2} \\ \sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum (X - \mu)^2\end{aligned}$$

✚ 樣本資料：

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (X - \bar{X})^2} \\ &= \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - \left(\frac{\sum X}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2} \\ \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum (X - \bar{X})^2\end{aligned}$$



例題 4-5

試求4, 6, 8, 12, 15的標準差與變異數 (設為母體資料)。

解：(a) 先求 $\mu = \frac{\sum X}{n} = \frac{4+6+8+12+15}{5} = \frac{45}{5} = 9$

$$\begin{aligned} \text{(b) } \sigma &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum (X - \mu)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5} [(4-9)^2 + (6-9)^2 + (8-9)^2 + (12-9)^2 + (15-9)^2]} \\ &= \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

$$\text{(c) } \sigma^2 = 4^2 = 16$$

另解：使用 $\sigma = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2}$ 解之

$$\sigma = \sqrt{\frac{485}{5} - 9^2} = 4$$



例題 4-6

試求算下列樣本資料的變異數與標準差：

4, 7, 9, 22, 8

解：(a) $\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X - \bar{X})^2 \quad (\bar{X} = 10)$

$$= \frac{1}{5-1} [(4-10)^2 + (7-10)^2 + (9-10)^2 + (22-10)^2 + (8-10)^2]$$
$$= \frac{194}{4}$$
$$= 48.5$$

(b) $\hat{S} = \sqrt{\hat{S}^2} = 6.96$



例題 4-7

甲班學生50人分A、B兩組：

A組20人，平均成績為70分，標準差8分

B組30人，平均成績為80分，標準差6分

則全班50人的成績之標準差為若干？

解： $\mu = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2} = \frac{20 \times 70 + 30 \times 80}{20 + 30} = 76 \text{ (分)}$

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2 + n_1 (\bar{X}_1 - \mu)^2 + n_2 (\bar{X}_2 - \mu)^2}{n_1 + n_2}} \\ &= \sqrt{\frac{20 \times 8^2 + 30 \times 6^2 + 20(70 - 76)^2 + 30(80 - 76)^2}{20 + 30}} = 8.44 \text{ (分)}\end{aligned}$$



4-6 分組資料差異量數之計算

例題 4-8

求下列五十名學生成績分配之四分位差與全距。

分 數	人 數
60~65	2
65~70	8
70~75	20
75~80	10
80~85	6
85~90	4



解： (a) Q_1 在第 $\frac{n}{4} = \frac{50}{4} = 12.5$ 項 (即第3組)

$$Q_1 = 70 + \frac{\frac{50}{4} - 10}{20} \times 5 = 70.63 \text{ (分)}$$

(b) Q_3 在第 $\frac{3n}{4} = \frac{3 \times 50}{4} = 37.5$ 項 (即第4組)

$$Q_3 = 75 + \frac{\frac{3 \times 50}{4} - 30}{10} \times 5 = 78.75 \text{ (分)}$$

$$(c) \text{ Q.D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{78.75 - 70.63}{2} = 4.06$$

$$(d) \text{ 全距 (近似值)} = (\text{最大一組的上限}) - (\text{最小一組的下限}) \\ = 90 - 60 = 30$$



例題 4-9

試就上例題4-8 (4-6.1) 求平均差。

解： (a) 以離中差方式計算者：

分 數	人數 (f)	X	$ X - M_e $	$f X - M_e $
60~65	2	62.5	11.25	22.5
65~70	8	67.5	6.25	50.0
70~75	20	72.5	1.25	25.0
75~80	10	77.5	3.75	37.5
80~85	6	82.5	8.75	52.5
85~90	4	87.5	13.75	55.0
合 計	50			242.5

$$\textcircled{1} \text{ 先求 } M_e = 70 + \frac{\frac{50}{2} - 10}{20} \times 5 = 73.75$$

$$\textcircled{2} \text{ 求 } |X - M_e| \text{ 及 } f |X - M_e|$$

$$\textcircled{3} \text{ 求 M.D.} = \frac{1}{n} \sum f |X - M_e| = \frac{1}{50} \times 242.5 = 4.85 (\text{分})$$



解： (b) 求以離均差方式計算者：

分 數	人數 (f)	X	$ X - \mu $	$f X - \mu $
60~65	2	62.5	12.2	24.4
65~70	8	67.5	7.2	57.6
70~75	20	72.5	2.2	44.0
75~80	10	77.5	2.8	28.0
80~85	6	82.5	7.8	46.8
85~90	4	87.5	12.8	51.2
合 計	50			252.0

① 先求 $\mu = \frac{\sum fX}{n} = \frac{3,735}{50} = 74.7$

② 求 $|X - \mu|$ 及 $f |X - \mu|$

③ 求 $M.D. = \frac{1}{N} \sum f |X - \mu| = \frac{1}{50} \times 252 = 5.04$ (分)



例題 4-10

試求甲班50名學生體重分配的標準差與變異數

體重 (公斤)	人數
40~50	3
50~60	9
60~70	20
70~80	15
80~90	2
90~100	1
合 計	50



解：

體重 (公斤)	人數	X_i	$X_i - \mu$	$(X_i - \mu)^2$	$f(X_i - \mu)^2$
40~50	3	45	-21.4	457.96	1,373.88
50~60	9	55	-11.4	129.96	1,169.64
60~70	20	65	-1.4	1.96	39.2
70~80	15	75	8.6	73.96	1,109.4
80~90	2	85	18.6	345.96	691.92
90~100	1	95	28.6	817.96	817.96
合 計	50				5,202.00

$$\mu = \frac{3,320}{50} = 66.4 \text{ (公斤)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum f(X - \mu)^2} = \sqrt{\frac{1}{50} (5,202)} = 10.2 \text{ (公斤)}$$



另解：

體重 (公斤)	人數 (f)	X_i	$f_i X_i$	$f_i X_i^2$
40~50	3	45	135	6,075
50~60	9	55	495	27,225
60~70	20	65	1,300	84,500
70~80	15	75	1,125	84,375
80~90	2	85	170	14,450
90~100	1	95	95	9,025
合 計	50		3,320	225,650

利用公式

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i X_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i X_i}{N} \right)^2} = \sqrt{\frac{225,650}{50} - \left(\frac{3,320}{50} \right)^2} = 10.2 \text{ (公斤)}$$



4-7 平均數與標準差的應用

- 相對差異量數：

$$\begin{array}{l} \text{相對標準差} \\ \text{(標準差係數)} \end{array} = \frac{\sigma}{\mu} \times 100\% \quad \left(\begin{array}{l} \text{若無特別指明，相對標準差通} \\ \text{稱為變異係數，以 C.V. 表示} \end{array} \right)$$



例題 4-11

甲班五十名學生平均身高160公分，標準差10公分，而平均體重50公斤，標準差4.2公斤，試求變異係數並比較之

解： 由於身高與體重是不同單位，故比較時，必須先計算變異係數。

$$(a) \text{ 身高之變異係數 } CV_1 = \frac{\sigma_1}{\mu_1} \times 100\% = \frac{10}{160} \times 100\% = 6.25\%$$

$$(b) \text{ 體重之變異係數 } CV_2 = \frac{\sigma_2}{\mu_2} \times 100\% = \frac{4.2}{50} \times 100\% = 8.4\%$$

$\because CV_1 < CV_2$ ， $\therefore$ 身高的變異係數較小，身高較體重資料集中整齊。



例題 4-12

高雄市一歲以下嬰兒平均身高為50公分，標準差5公分。二十歲以上之成年人平均身高167公分，標準差7公分。試比較兩組資料之差異情形，何者較小？資料較為集中整齊？

解： 雖然兩者身高之單位相同，但由於平均身高差異太大，不宜直接比較，故應計算其變異係數。

$$(a) \text{ 嬰兒之變異係數 } CV_1 = \frac{\sigma_1}{\mu_1} = \frac{5}{50} \times 100\% = 10\%$$

$$(b) \text{ 成人之變異係數 } CV_2 = \frac{\sigma_2}{\mu_2} = \frac{7}{167} \times 100\% = 4.19\%$$

由於 $CV_2 < CV_1$ ，所以成人之身高變異係數較小，身高資料較為集中整齊。



例題 4-13

試就例題4-10求算：

- (a) 全距係數。
- (b) 四分位差係數。
- (c) 平均差係數。
- (d) 標準差係數 (變異係數)。

解： (a) 全距係數 $R = 100 - 40 = 60$

$$\text{全距係數} = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{X_{\max} + X_{\min}} \times 100\% = \frac{100 - 40}{100 + 40} \times 100\% = 42.9\%$$



(b) 四分位差係數

$$Q_1 = 60 + \frac{\frac{50}{4} - 12}{20} \times 10 = 60.25$$

$$M_e = 60 + \frac{\frac{50}{2} - 12}{20} \times 10 = 66.5$$

$$Q_3 = 70 + \frac{\frac{3 \times 50}{4} - 32}{15} \times 10 = 73.67$$

$$\text{四分位差係數} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100\% = \frac{73.67 - 60.25}{73.67 + 60.25} \times 100\% = 10.02\%$$



(c) 平均差係數

① 以離中差計算 ($M_e = 66.5$)

$$\text{M.D.} = \frac{1}{N} \sum f|X - M_e| = \frac{1}{50} \times 391 = 7.82$$

$$\text{平均差係數} = \frac{\text{M.D.}}{M_e} \times 100\% = \frac{7.82}{66.5} \times 100\% = 11.76\%$$

② 以離均差計算 ($\mu = 66.4$)

$$\text{M.D.} = \frac{1}{N} \sum f|X - \mu| = \frac{1}{50} \times 389.6 = 7.79$$

$$\text{平均差係數} = \frac{\text{M.D.}}{\mu} \times 100\% = \frac{7.79}{66.4} \times 100\% = 11.73\%$$

(d) 標準差係數 (變異係數) $\mu = 66.4$, $\sigma = 10.2$

$$\text{標準差係數} = \frac{\sigma}{\mu} \times 100\% = \frac{10.2}{66.4} \times 100\% = 15.36\%$$



4-7 平均數與標準差的應用

- 標準分數：

- + 母體資料：
$$Z = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$

- + 樣本資料：
$$Z = \frac{X_i - \bar{X}}{\hat{S}}$$



例題 4-14

甲班五十名學生平均身高150公分，標準差5公分，體重40公斤，標準差2公斤，小明的身高是160公分，體重38公斤，試求小明之身高與體重之Z分數，並說明其在班上身高或體重較有份量？

解： 因為身高、體重的單位不同，要進行比較，可先化為 Z 分數

$$(a) \text{ 身高Z分數} = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} = \frac{160 - 150}{5} = 2$$

$$(b) \text{ 體重Z分數} = \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} = \frac{38 - 40}{2} = -1$$

小明身高Z分數為2，表示其身高值大於班上平均身高2個標準差，而體重Z分數為 -1，表示其體重小於班上平均體重1個標準差，由此可見，小明的身高比體重在班上較有份量。



例題 4-15

假設一項測驗以三科決定錄取，並從甲乙生兩位中必須選出一位，則應選那位？試說明之。

	原始分數		總考生	
	甲生	乙生	平均數	標準差
國文	70	80	60	8
英文	30	35	32	6
數學	40	30	35	4



解：

	原始分數		總考生		Z分數	
	甲生	乙生	平均數	標準差	甲生	標準差
國文	70	80	60	8	1.25	2.5
英文	30	35	32	6	-0.33	0.5
數學	40	30	35	4	1.25	-1.25
總分	140	145			2.17	1.75

(a) 首先計算Z分數，甲乙生之Z分數如上表所示。

(b) 由該表可知，若甲乙生比較其原始分數，應錄取乙生 ($145 > 140$)

，但若比較其Z分數，發現應錄取甲生才對。由於國文、英文、數學三科在性質上是不同的，若予以加總，就如同將身高和體重加總一樣，不具意義。故本題應採用Z分數進行比較，所以應錄取甲生。



例題 4-16

張三身高165公分，體重60公斤，而全班五十名學生之平均身高為161公分，標準差2公分，平均體重61公斤，標準差1公斤，試問：

- (a) 張三在班上是身高較高或體重較重？
- (b) 全班是身高或體重資料的數值較一致？

解： (a) 求算Z分數

$$\textcircled{1} \text{ 身高Z分數} = \frac{165 - 161}{2} = 2$$

$$\textcircled{2} \text{ 體重Z分數} = \frac{60 - 61}{1} = -1$$

∴ 身高Z分數大於體重Z分數 ($2 > -1$)

∴ 張三就身高與體重言，在班上身高較高。

$$\text{(b) } \textcircled{1} \text{ 全班身高變異係數 } CV_1 = \frac{2}{161} \times 100\% = 1.24\%$$

$$\textcircled{2} \text{ 全班體重變異係數 } CV_2 = \frac{1}{61} \times 100\% = 1.64\%$$

∴ $CV_1 < CV_2$ ，∴ 全班身高資料較集中一致。



4-7 平均數與標準差的應用

- 謝氏定理與經驗法則：

- ✚ 謝氏定理：

所謂謝氏定理 (Chebyshev's Theorem)，是由數學家 Chebyshev (1821-1894) 所提出，他發現平均數與標準差有某種關係存在，其關係如下：

“一群資料中 “至少” 有 $\left(1 - \frac{1}{K^2}\right) 100\%$ 的數值，

會落在平均數附近 K 個標準差之範圍內，

換言之，即落於 $(\mu - K\sigma, \mu + K\sigma)$ 之區間內，

至少有 $\left(1 - \frac{1}{K^2}\right) 100\%$ 之數值”。



例題 4-17

假定甲班一百名學生的平均體重為50公斤，標準差2公斤，試問：(請以 Chebyshev's 定理說明之)

- (a) 體重在48公斤~ 52公斤的學生至少有多少人？
- (b) 體重在46公斤~ 54公斤的學生至少有多少人？
- (c) 體重在44公斤~ 56公斤的學生至少有多少人？

解： (a) $(48, 52) = (\mu - K\sigma, \mu + K\sigma) = (50 - 2, 50 + 2) \Rightarrow K = 1$ 即至少

$$\left(1 - \frac{1}{K^2}\right) 100\% = \left(1 - \frac{1}{1^2}\right) 100\% = 0\%, \text{ 在 } 48 \text{ 公斤} \sim 52 \text{ 公斤內},$$

換言之，必定有學生體重在此範圍內。

(b) $(46, 54) = (50 - 2 \times 2, 50 + 2 \times 2) \Rightarrow K = 2$ ，即至少有 $\left(1 - \frac{1}{K^2}\right) 100\%$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) 100\% = \frac{3}{4}\% \text{ 在此範圍內，換言之，至少 } 100 \text{ 名} \times \frac{3}{4}\% =$$

75 名同學，體重在 46 公斤到 54 公斤之間。

(c) $(44, 56) = (50 - 3 \times 2, 50 + 3 \times 2) \Rightarrow K = 3$ ，即至少有 $\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) 100\% =$

$$\frac{8}{9}\% \text{ 在此範圍內，換言之，至少有 } 100 \text{ 名} \times \frac{8}{9}\% = 88 \text{ 名同學，}$$

體重在 44~56 公斤之範圍內。



4-7 平均數與標準差的應用

● 謝氏定理與經驗法則：

✚ 經驗法則：

- (1) 約有 68% 之資料值會落在 $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ 之區間內。
- (2) 約有 95% 之資料值會落在 $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ 之區間內。
- (3) 約有 99.7% 之資料值會落在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之區間內。

✚ 謝氏定理與經驗法則之比較：

K	$\mu \pm K\sigma$ 區間	謝氏定理	經驗法則
1	$(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$	至少 0	68%
2	$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$	至少 $\frac{3}{4}\% = 75\%$	95%
3	$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$	至少 $\frac{8}{9}\% = 88.89\%$	99.7%



例題 4-18

假定甲班一百名學生的平均體重為50公斤，標準差2公斤，試以經驗法則求算下列問題：

- (a) 體重在48~52公斤的學生約有多少人？
- (b) 體重在46~54公斤的學生約有多少人？
- (c) 體重在44~56公斤的學生約有多少人？

(註：上題題目是問至少有多少人，本題題目是問約有多少人。)

解： (a) $(48, 52) = (50 - 2, 50 + 2) \Rightarrow$ 1個標準差之距離，故有68% 的比例落於48~52公斤之範圍內，約100名 $\times$ 68% = 68 名學生。

(b) $(46, 54) = (50 - 2 \times 2, 50 + 2 \times 2) \Rightarrow$ 2個標準差之距離，故有95% 的比例落於46~54公斤之範圍內，約100名 $\times$ 95% = 95 名學生。

(c) $(44, 56) = (50 - 3 \times 2, 50 + 3 \times 2) \Rightarrow$ 3個標準差之距離，故有99.7% 的比例落於44~56公斤之範圍內，約100名 $\times$ 99.7% = 99 學生。



例題 4-19

全校1,000人國文成績測驗平均分數為80分，標準差5分，試求：

(a) 成績在70分與90分之間約有多少人？

(b) 成績在65分與95分之間約有多少人？

假設成績適合於任何分配，或鐘形分配方式，試分別求算之。

解： (a) 假設成績適合任何分配，依謝氏定理求算：

$$\textcircled{1} \quad (70, 90) = (80 - 2 \times 5, 80 + 2 \times 5) \Rightarrow K = 2 \Rightarrow \text{至少} 75\%$$

$\therefore$ 至少有 $1,000 \text{ 名} \times 75\% = 750$ 名學生成績在70~90分之間。

$$\textcircled{2} \quad (65, 95) = (80 - 3 \times 5, 80 + 3 \times 5) \Rightarrow K = 3 \Rightarrow \text{至少} 88.89\%$$

$\therefore$ 至少有 $1,000 \text{ 名} \times 88.89\% = 888$ 名學生成績在65~95分之間。

(b) 假設成績呈鐘形分配，則依經驗法則求算：

$$\textcircled{1} \quad (70, 90) \Rightarrow \text{二個標準差} \Rightarrow 95\% \Rightarrow \text{約有} 1,000 \text{ 名} \times 95\% = 950 \text{ 名學生成績在70~90分之間。}$$

$$\textcircled{2} \quad (65, 95) \Rightarrow \text{三個標準差} \Rightarrow 99.7\% \Rightarrow \text{約有} 1,000 \text{ 名} \times 99.7\% = \text{名學生成績在65~95分之間。}$$



4-8 動差

例題 4-20

試求下表10人年齡分配的前四級主要動差：

年齡 (歲)	人 數
10~20	1
20~30	3
30~40	4
40~50	1
50~60	1



解： (a) 以主要動差的公式解之。

年齡 (歲)	人數 (f)	組中點 (X)	fX	X - μ	f(X - μ)	f(X - μ) ²	f(X - μ) ³	f(X - μ) ⁴
10~20	1	15	15	-18	-18	324	-5,832	104,976
20~30	3	25	75	-8	-24	192	-1,536	12,288
30~40	4	35	140	2	8	16	32	64
40~50	1	45	45	12	12	144	1,728	20,736
50~60	1	55	55	22	22	484	10,648	234,256
合 計	10		330		0	1,160	5,040	372,320

$$① \quad m_1 = \frac{1}{N} \sum f(X - \mu) = \frac{1}{10} \times 0 = 0$$

$$② \quad m_2 = \frac{1}{N} \sum f(X - \mu)^2 = \frac{1}{10} \times 1,160 = 116$$

$$③ \quad m_3 = \frac{1}{N} \sum f(X - \mu)^3 = \frac{1}{10} \times 5,040 = 504$$

$$④ \quad m_4 = \frac{1}{N} \sum f(X - \mu)^4 = \frac{1}{10} \times 372,320 = 37,232$$



(b)以原動差公式求主要動差。

年齡 (歲)	人數 (f)	組中點 (X)	fX	fX^2	fX^3	fX^4
10~20	1	15	15	225	3,375	50,625
20~30	3	25	75	1,875	46,875	1,171,875
30~40	4	35	140	4,900	171,500	6,002,500
40~50	1	45	45	2,025	91,125	4,100,625
50~60	1	55	55	3,025	166,375	9,150,625
合 計	10		330	12,050	479,250	20,476,250

$$m'_1 = \frac{1}{N} \sum fX = \frac{1}{10} \times 330 = 33$$

$$m'_2 = \frac{1}{N} \sum fX^2 = \frac{1}{10} \times 12,050 = 1,205$$

$$m'_3 = \frac{1}{N} \sum fX^3 = \frac{1}{10} \times 479,250 = 47,925$$

$$m'_4 = \frac{1}{N} \sum fX^4 = \frac{1}{10} \times 20,476,250 = 2,047,625$$



代入公式

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = m'_2 - (m'_1)^2 = 1,205 - (33)^2 = 116$$

$$m_3 = m'_3 - 3m'_2m'_1 + 2(m'_1)^3 = 47,925 - 3(1,205)(33) + 2(33)^3 = 504$$

$$\begin{aligned} m_4 &= m'_4 - 4m'_3m'_1 + 6m'_2(m'_1)^2 - 3(m'_1)^4 \\ &= 2,047,625 - 4(47,925)(33) + 6(1,205)(33)^2 - 3(33)^4 \\ &= 37,232 \end{aligned}$$



4-9 偏態系數

例題 4-21

試以例題4-20求算偏態係數：

- (a) 皮爾生法
- (b) 包來公式
- (c) 動差法

解： (a) 皮爾生公式

$$\mu = \frac{\sum fX}{n} = \frac{330}{10} = 33 \text{ (歲)}$$

$$M_e = 30 + \frac{\frac{10}{2} - 4}{4} \times 10 = 32.5 \text{ (歲)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum f(X - \mu)^2} = \sqrt{\frac{1,160}{10}} = 10.77 \text{ (歲)}$$

$$SK_p = \frac{3(\mu - M_e)}{\sigma} = \frac{3(33 - 32.5)}{10.77} = 0.14 \text{ (正偏)}$$



(b) 包來公式

$$Q_1 = 20 + \frac{\frac{10}{4} - 1}{3} \times 10 = 25 \text{ (歲)}$$

$$Q_3 = 30 + \frac{\frac{3 \times 10}{4} - 4}{4} \times 10 = 38.75 \text{ (歲)}$$

$$SK_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1} = \frac{38.75 + 25 - 2 \times 32.5}{38.75 - 25} = -0.09 \text{ (微負偏)}$$

(c) 動差法

$$\beta_1 = \frac{\frac{1}{N} \sum f(X - \mu)^3}{\sigma^3} = \frac{\frac{1}{10} \times 5,040}{(10.77)^3} = 0.4 \text{ (正偏)}$$



4-10 峰態系數

例題 4-22

試以例題4-20求算峰態係數。

解： $\mu = \frac{\sum fX}{N} = \frac{330}{10} = 33 \text{ (歲)}$

$$m_2 = \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum f(X - \mu)^2 = \frac{1,160}{10} = 116$$

$$m_4 = \frac{1}{N} \sum f(X - \mu)^4 = \frac{372,320}{10} = 37,232$$

$$\beta_2 = \frac{m_4}{\sigma^4} = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{37,232}{(116)^2} = 2.77 < 3$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = 2.77 - 3 = -0.23 < 0$$

∴ 此分配為低闊峰。

