

CHAPTER

3



經一鈍形物之流場：任何物體置於一流動之流體內，物體前方有一停滯點，此點速度為零。此處有一相對較大壓力且把流場分成二部份，一是流過物體上方，另一是從物體下方流過（在水中染色；照片由 B.R. Munson 拍攝照片）。

基礎流體動力學—柏努利方程式

Elementary Fluid Dynamics—The Bernoulli Equation

學習目標

學習完本章節後，你將能夠：

- 討論牛頓第二定律在流體流動上之應用。
- 解釋柏努利方程式的推導使用及限制。
- 使用柏努利方程式（單獨使用或結合連續方程式）解決簡單及流動問題。
- 應用靜壓、停滯壓力、動壓及總壓之觀念。
- 使用能量線與水力梯度線計算各種流動性質。

- 3.1 牛頓第二定律
- 3.2 沿流線的 $F = ma$
- 3.3 垂直流線的 $F = ma$
- 3.4 物理解釋
- 3.5 靜壓、停滯壓、動壓與總壓
- 3.6 柏努利方程式的使用實例
- 3.7 能量線與水力梯度線
- 3.8 柏努利方程式的使用限制
- 3.9 總結與學習指南



3.1 牛頓第二定律

Newton's Second Law

依牛頓第二運動定律，作用在流體質點的淨力必等於其質量乘以質點之加速度，其方程式為

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

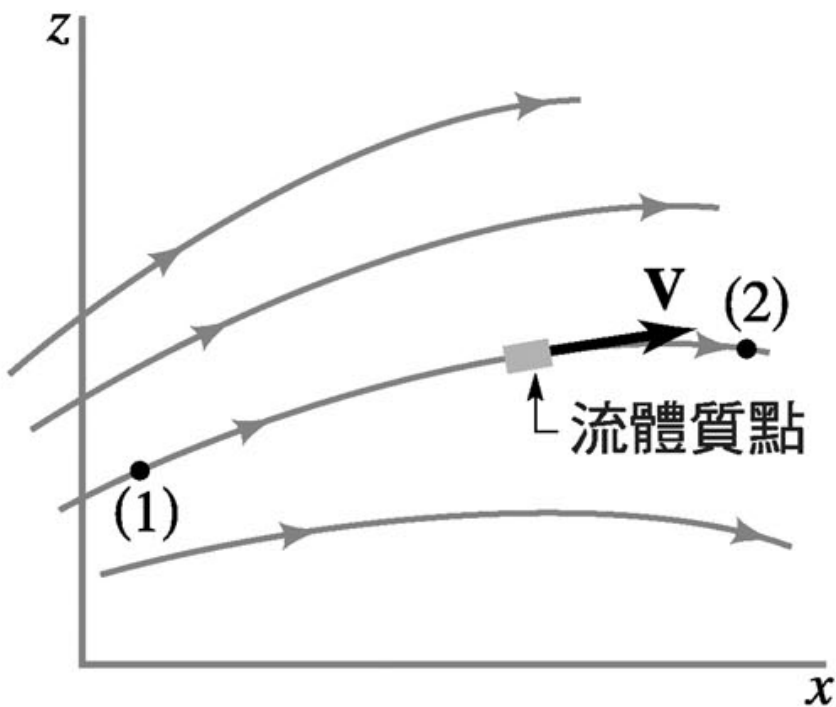
在本章節中，我們將探討無黏性的流體運動，也就是將流體的黏度假設為零。

我們假設流體在運動過程中僅受到壓力與重力的作用，檢驗以牛頓第二定律應用於流體質點之形式：

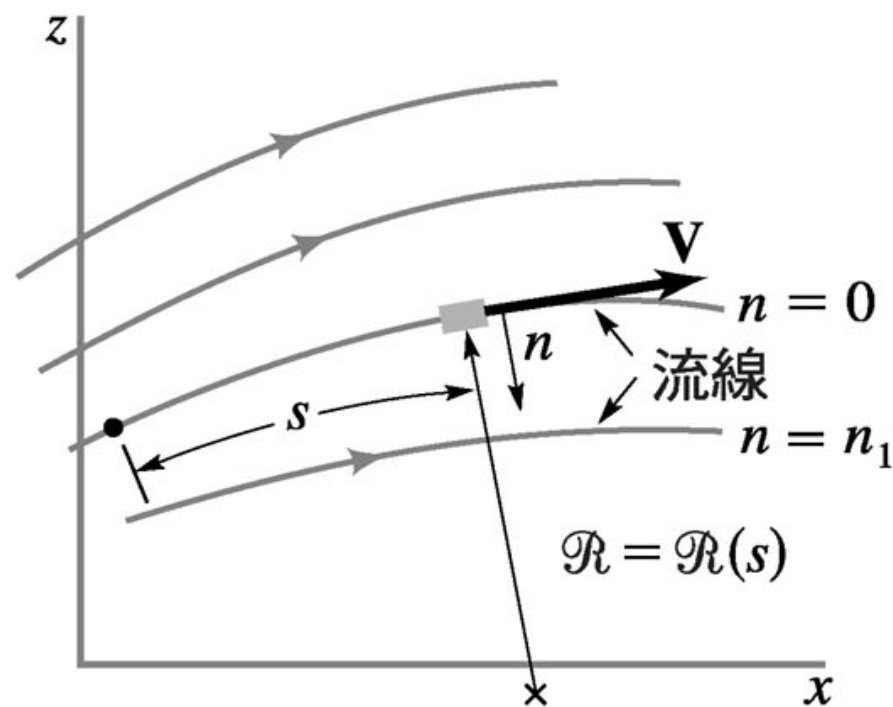

$$(\text{質點的淨壓力}) + (\text{質點的淨重力}) = (\text{質點質量}) \times (\text{質點加速度})$$

在壓力、重力與加速度之間的交互作用的結果提供流體力學的許多應用。

我們考慮二維運動侷限在如圖 3.1a 所示的 $x-z$ 平面。圖中以速度向量 $\mathbf{v}$ 描述每一流體質點的運動，此速度向量之定義為單位時間之質點位移的改變。質點的速度向量應具備大小（即速率 $V = |\mathbf{v}|$ ）與方向。當質點移動，它沿著一條特定路徑，而此路徑的形狀通常由質點速度支配。



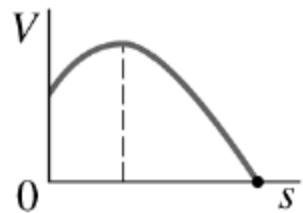
(a)



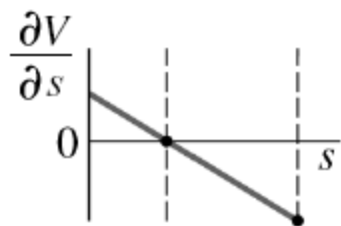
(b)

圖 3.1 (a) 在 $x-z$ 平面的流動；(b) 以流線和法線座標描述流動。

如果流動呈現**穩定狀態**（ steady ；即在流場中任一特定項位置上，任何物理性質不會項時間而改變 ），而各質點均沿著其路徑滑動，速度向量到處都與路徑相切。在流場中若有曲線，線上任意位置上的切線方向與質點之速度向量相同，則稱此曲線為**流線**（ streamlines ）。取一流線並在該線定出某一參考原點，以距原點的距離 $s = s(t)$ 和流線的局部曲率半徑 $\mathcal{R} = \mathcal{R}(s)$ 來描述質點的運動。流線上質點行經的距離與質點的速度有關，即 $V = ds/dt$ ，而曲率半徑與流線的形狀有關。除了沿著流線的座標 s 之外，還有用到垂直流線的座標 n ，如圖 3.1b 所示。



由定義我們知道，質點的加速度是質項速度隨時間的變化率，即 $a = dV/dt$ 。此加速度向量可分解成兩個分量——一個是沿著流線方向的流線加速度 a_s ，另一個是垂直流線方向的法線加速度 a_n 。

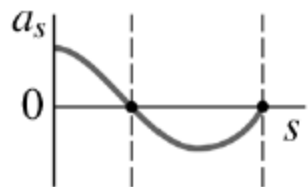


在 s 方向的加速度分量利用微分的連鎖法則可寫成

$$a_s = dV/dt = (\partial V/\partial s) (ds/dt) = (\partial V/\partial s) V。其中 V = ds/dt。$$

而法線方向的加速度——離心加速度——可以用質點的速度大小及流線的曲率半徑表示為 $a_n = V^2/\mathcal{R}$ 。因此穩定流動下，在 s 及 n 方向的加速度分量 a_s 與 a_n ，可寫成

$$a_s = V \frac{\partial V}{\partial s} \quad , \quad a_n = \frac{V^2}{\mathcal{R}} \quad (3.1)$$



3.2 沿流線的 $F = ma$

$F = ma$ Along a Streamline

我們考慮圖 3.2 所項流體小質點的自由體圖。此微小的流體質點在平面上的尺寸為 $\delta s \times \delta n$ ，而 δy 垂直於圖 3.3 之自由體圖圖面。 $\hat{s}$ 與 $\mathbf{n}$ 分別表示成沿著流線與垂直流線的單位向量。對於穩定流動（steady flow），沿著流線方向 s 的牛頓第二定律分量為

$$\delta W_s = -\delta W \sin \theta = -\gamma \delta V \sin \theta \quad (3.2)$$

方程式中， $\Sigma \delta F_s$ 表示在 s 方向作用在質點上所有力量的 s

方向分量和，質點之質量為 $\delta m = \rho \delta \mathcal{V}$ ，且 s 方向質點的加速度為 $V \delta V / \delta s$ 。此處 $\delta \mathcal{V} = \delta s \delta n \delta y$ 表示質點的體積。

質點的重力（重量）可寫成 $\delta \mathcal{W} = \gamma \delta \mathcal{V}$ ，其中 $\gamma = \rho g$ 表示流體的比重量（lb/ft³ 或 N/m³）。因此，在流線方向的重力分量為

$$\delta \mathcal{W}_s = -\delta \mathcal{W} \sin \theta = -\gamma \delta \mathcal{V} \sin \theta$$

如果流線在所感興趣的位置上為水平，則 $\theta = 0$ ，而質點重量在沿著流線方向並沒有分量，不能對在此方向加速度有所貢獻。



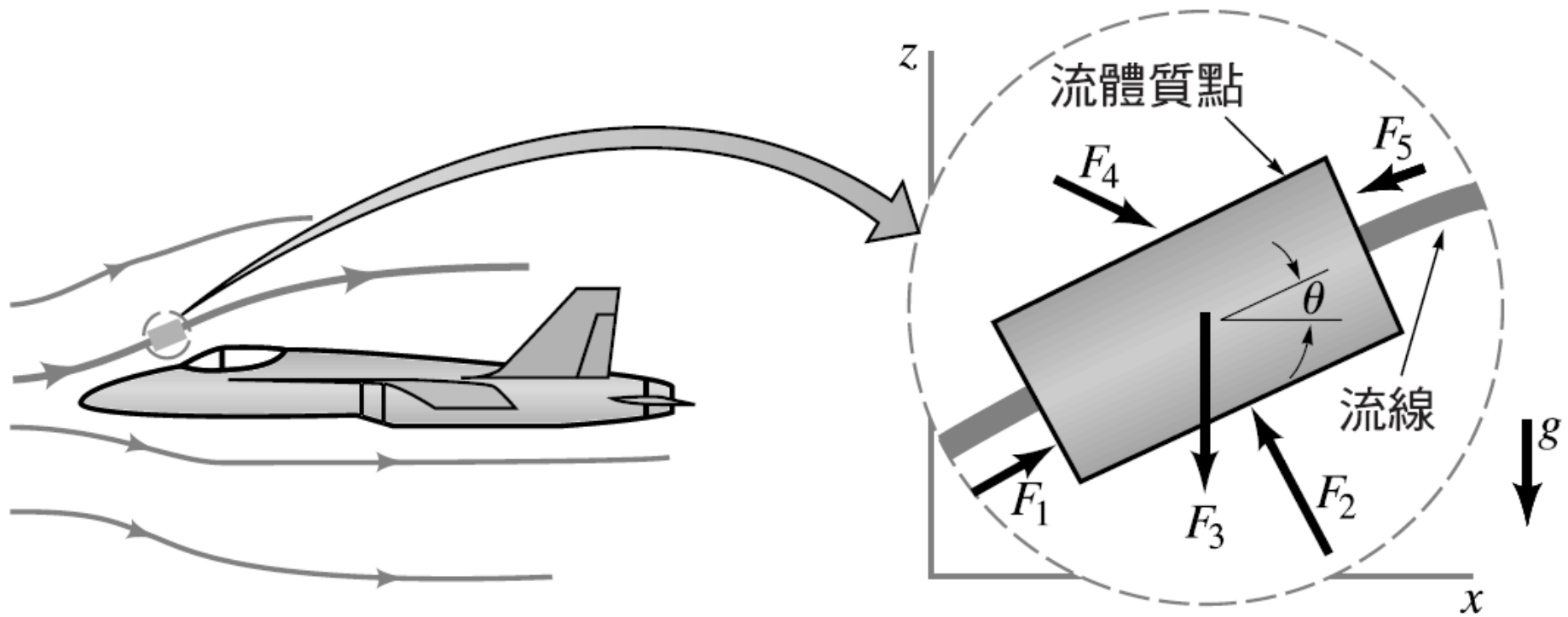


圖 3.2 在流場中分離出的小流體質點。

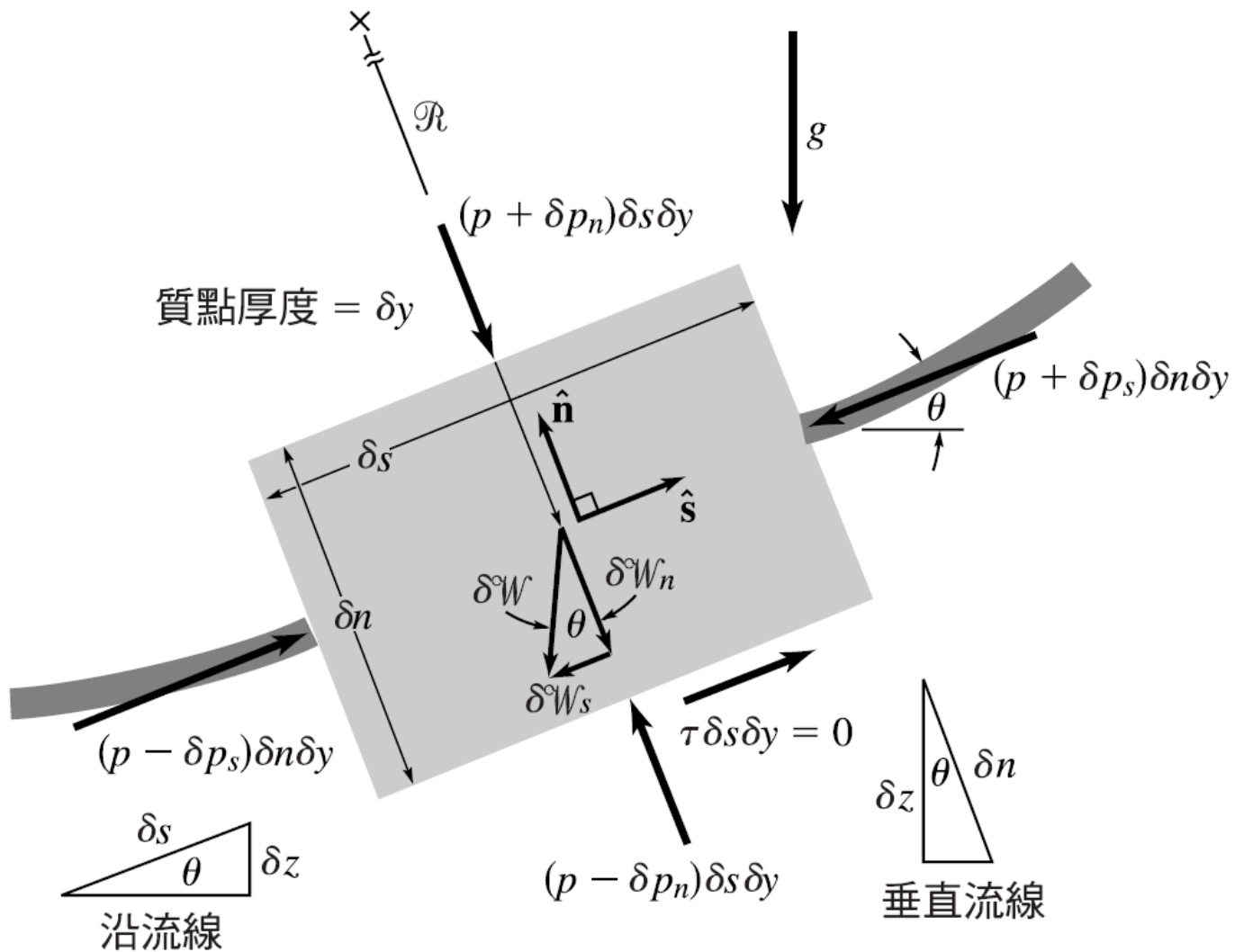


圖 3.3 考慮在壓力和重力作用下的流體質點之自由體圖。

假設如圖 3.3 之質點中央位置之壓力為 p ，則在垂直流線方向的兩個平面上之平均值，壓力依次為 $p + \delta p_s$ 及 $p - \delta p_s$ 。由於質點「尺寸相當小」，我們把壓力利用單項泰勒級數展開法可得

$$\delta p_s \approx \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\delta s}{2}$$

令在流線上的壓力是 δF_{ps} ，則

$$\begin{aligned} \delta F_{ps} &= (p - \delta p_s) \delta n \delta y - (p + \delta p_s) \delta n \delta y = -2\delta p_s \delta n \delta y \\ &= -\frac{\partial p}{\partial s} \delta s \delta n \delta y = -\frac{\partial p}{\partial s} \delta V \end{aligned}$$

從圖 3.3 我們可知，流線方向作用在質點的淨作用力為

$$\sum \delta F_s = \delta W_s + \delta F_{ps} = \left(-\gamma \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial s} \right) \delta V \quad (3.3)$$

結合 3.2 與 3.3 式，則沿流線方向質點的運動方程式可寫成

$$-\gamma \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s} \quad (3.4)$$

3.4 式的物理含義即代表沿著流線方向的流體質點速度的變化會受到壓力與質點重量的影響。

例題 3.1 沿流線的壓力變化

■ 已知—

考慮流體流動是無黏性、不可壓縮且穩定的，沿著半徑為 a 的球體前的水平流線 $A - B$ ，如圖 E3.1a 所示。從較高深理論對流經一球體的分析結果，流體沿著此流線的移動速度可寫成

$$V = V_0 \left(1 + \frac{a^3}{x^3} \right)$$

■ 試求—

從球體前很遠處的 A 點（ $x_A = -\infty$ 且 $V_A = V_0$ ）位置，沿著水平流線移動至球體上 B 點（ $x_B = -a$ 且 $V_B = 0$ ）過程中的壓力變化。

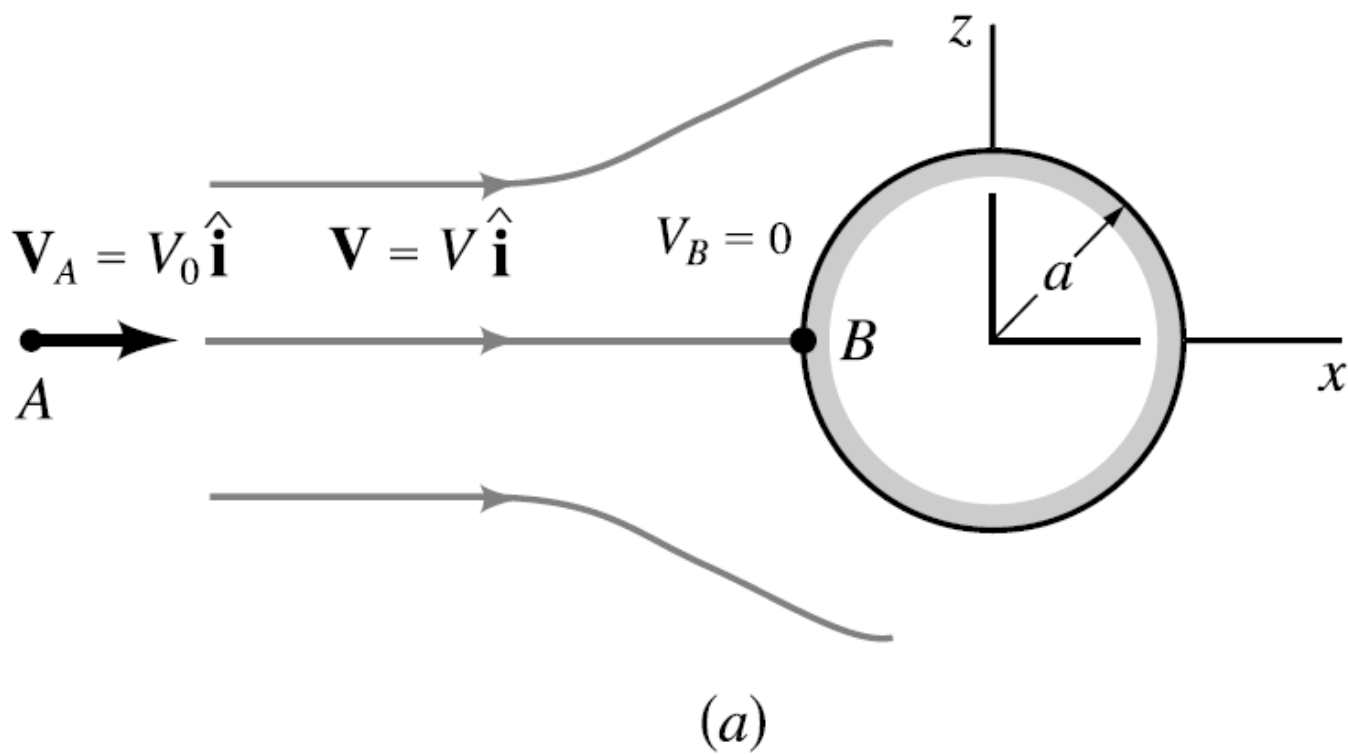


圖 E 3.1

解答

已知流動是穩定且沒有黏性，所以可採用 3.4 式。此外，因 $A - B$ 是一流線為水平線， $\sin\theta = \sin 0^\circ = 0$ ，所以沿著這流線的運動方程式可化簡成為

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\rho V \frac{\partial V}{\partial s} \quad (1)$$

沿著流線的速度變化為已知，加速度項可整理成

$$\begin{aligned} V \frac{\partial V}{\partial s} &= V \frac{\partial V}{\partial x} = V_0 \left(1 + \frac{a^3}{x^3} \right) \left(-\frac{3V_0 a^3}{x^4} \right) \\ &= -3V_0^2 \left(1 + \frac{a^3}{x^3} \right) \frac{a^3}{x^4} \end{aligned}$$

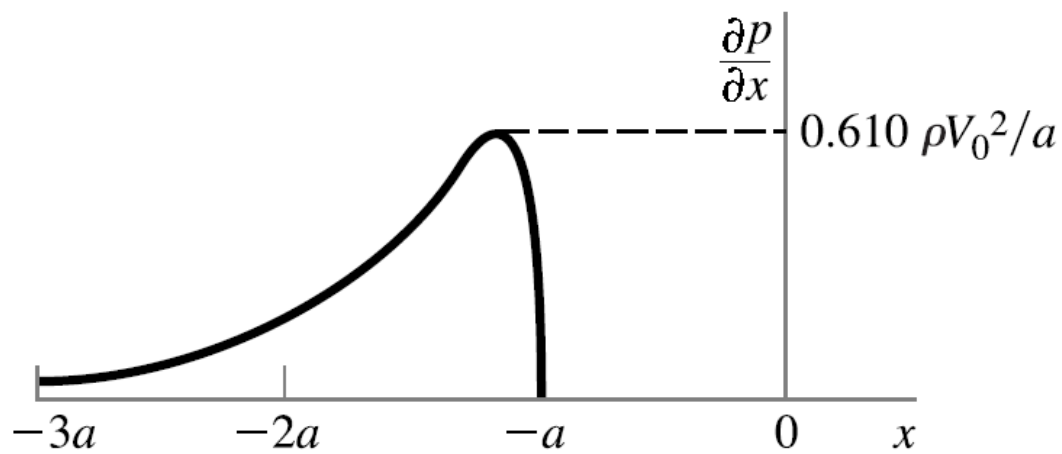
其中，沿著 $A - B$ 流線 s 與 x 兩軸完全一致，故可以將 s 替換

成 x 。經代入後得知，沿一流線 $V \partial V / \partial s < 0$ 。亦即流體從球體遠處以速度 V_0 ，運動至球體「鼻尖處」($x = -a$) 速度遞減到零。

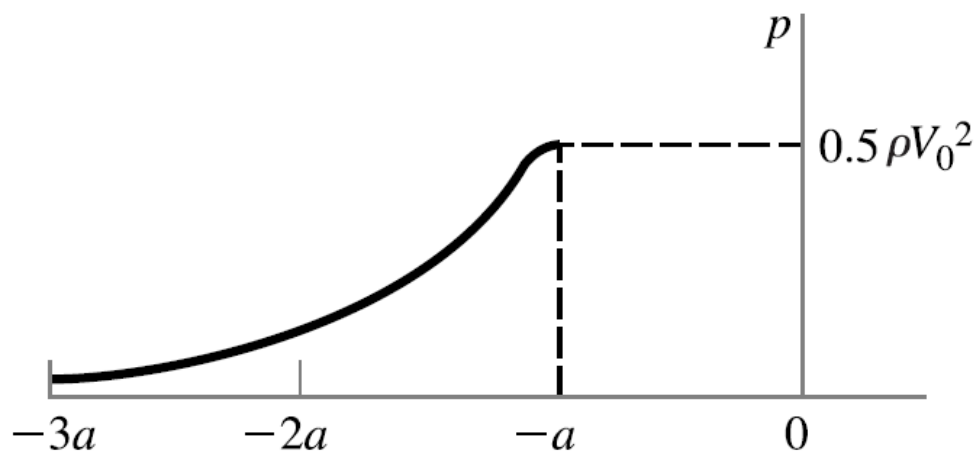
因此，根據 1 式為了產生已知的運動，則沿著流線的壓力梯度為

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{3\rho a^3 V_0^2 (1 + a^3/x^3)}{x^4} \quad (2)$$

此變化情形由圖 E 3.1b 可見。顯然地由 A 點到 B 點在流動方向的壓力變化呈現增大的趨勢 ($\partial p / \partial x > 0$)。最大的壓力梯度 ($0.610\rho V_0^2 / a$) 在球體的正前方產生 ($x = 1.205a$)。就是這壓力梯度致使流動由 $V_A = 0$ 一直減速到 $V_B = 0$ 。



(b)



(c)

圖 E 3.1

沿著流線的壓力分布，可利用 2 式由 $x = -\infty$ 處的 $p = 0$ (gage)，一直積分至任意 x 處的壓力 p 。結果如圖 E 3.1c 所示為

$$p = -\rho V_0^2 \left[\left(\frac{a}{x} \right)^3 + \frac{(a/x)^6}{2} \right] \quad (\text{Ans})$$

■ 註解一

因 $V_B = 0$ 故點 B 稱為停滯點，此項壓力代表沿著流線的最大壓力點 ($p_B = \rho V^2 / 2$)。第 9 章中，這過量的壓力作用在球體 (如 $p_B > 0$) 的前面提供對球體產生的淨阻力。注意壓力梯度與壓力跟流體密度直接成正比，事實之表現為流體慣性跟其質量成正比。

流力新知

■ 不正確的雨滴形狀

雨滴以淚滴形狀表示法幾乎出現在各處，從幼兒書籍到氣象電台的氣候圖表，但這是不正確的，只有當雨滴滑落窗玻璃時才會有此典型淚滴外形。雨滴真實的形狀是水滴的尺寸的函數，是雨滴表面張力與作用在雨滴的空氣壓力間之平衡所導致。半徑小於 0.5 mm 的小水滴為球狀，因為表面張力效應（與水滴尺寸成反比）遠勝於水的速度而作用在球底下漸增的壓力， $rV_0^2 / 2$ 。水滴尺寸增加時，水滴下降速度變快而增加之壓力導致水滴變扁平。例如 2 mm 水滴被壓扁成漢堡麵包形狀。在稍微大的水滴底部成凹面，當水滴半徑超過 4 mm，底部凹陷越增加，水滴成似反轉水袋在底部形成具有環形水帶，此環最後解散成為小水滴（見習題 3.14）。

3.4 式可再重新排列與積分如下所示。首先，由圖 3.3 可看出，沿著流線 $\sin \theta = dz/ds$ 。我們也可寫出 $VdV/ds = \frac{1}{2}d(V^2)/ds$ 後沿著流線 $\partial p/\partial s = dp/ds$ 。將上述觀念結合並代入 3.4 式中，下式結果沿流線是成立

$$-\gamma \frac{dz}{ds} - \frac{dp}{ds} = \frac{1}{2} \rho \frac{d(V^2)}{ds}$$

簡化成

$$dp + \frac{1}{2} \rho d(V^2) + \gamma dz = 0 \quad (\text{沿著流線}) \quad (3.5)$$

若密度為常數，則可進行積分而得

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 + \gamma z = \text{沿著流線的常數} \quad (3.6)$$

此式為著名的**柏努利方程式**（ Bernoulli Equation ） - 是流體力學中非常強而有力的工具。

例題 3.2 柏努利方程式

■ 已知—

考慮在自行車騎士在靜止的空氣中以 V_0 的速率移動時，其四周的空氣的流動情形，如圖 E3.2 所示。

■ 試求—

試求在點 (1) 與點 (2) 間的壓差。

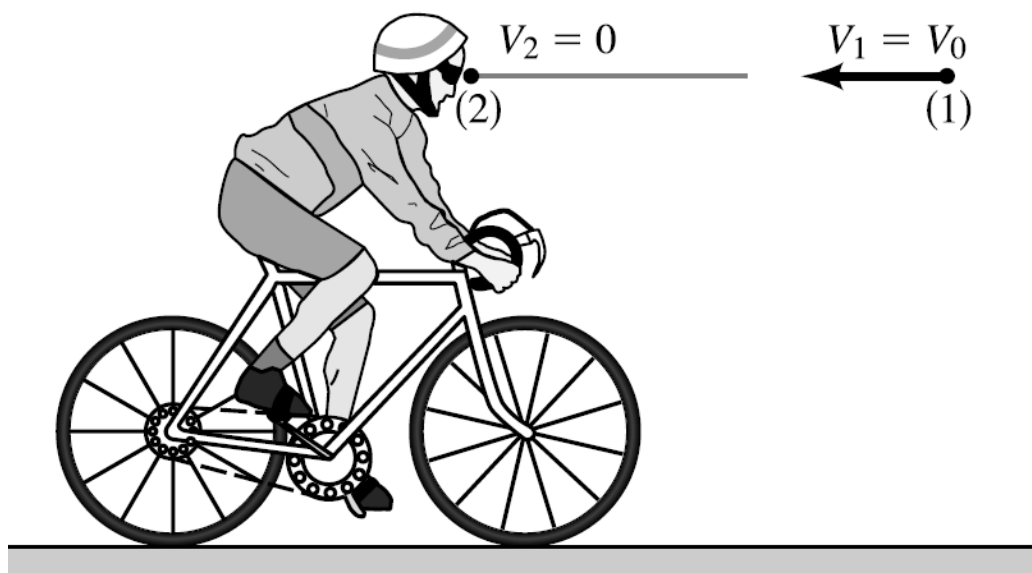


圖 E 3.2

解答

取一座標系統固定在自行車上，如圖 E3.2 所示，因此空氣是以速率 V_0 穩定的流向自行車騎士。如果柏努利方程式的假設是成立的（穩定、不可壓縮、沒有黏性流），則在流線點 (1) 與點 (2) 之間可採用 3.6 式

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \gamma z_2$$

點 (1) 位置為自由流，所以 $V_1 = V_0$ ；而位於自行車騎士的鼻尖為點 (2)，因此 $z_1 = z_2$ 且 $V_2 = 0$ （兩者都是合理的假設，將在 3.5 節討論）。因而點 (2) 與點 (1) 間的壓差的大小為

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho V_1^2 = \frac{1}{2} \rho V_0^2 \quad (\text{Ans})$$

■ 註解—

在例題 3.1 由於沿著流線的項度分布 $V(s)$ 為已知，故對壓力梯度作積分而得到類似的結果。柏努利方程式是 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 的通用積分形式。若想解出 $p_2 - p_1$ 值並不需要知道詳細速度分布—只需要點 (1) 與點 (2) 的「邊界條件」即可。當然，若項決定介於點 (1) 與點 (2) 間的壓力值，則需知項沿著流線的項度值。注意測得 $p_2 - p_1$ 值就可決定速率 V_0 。這就是許多速度量測設備的基本原理，將在 3.5 節作討論。

若自行車前進時有加項度或減項度的情況，則流動會變成不穩定（即 $V_0 \neq \text{定值}$ ），上述的分析將不正確，因為 3.6 式是侷限在穩定流動。

3.3 垂直流線的 $F = ma$

$F = ma$ Normal to a Streamline

我們再考慮圖 3.3 中流體質點的力平衡。然而這次我們考慮的是垂直方向的力分量，應用牛頓第二定律於此方向得

$$\sum \delta F_n = \frac{\delta m V^2}{\mathcal{R}} = \frac{\rho \delta V V^2}{\mathcal{R}} \quad (3.7)$$

方程式中， $\sum \delta F_n$ 代項所有 n 方向作用在質點上的力之分量和。若流動是穩定，將有一法線加速度 $a_n = V^2 / \mathcal{R}$ 其中 $\mathcal{R}$ 流線的局部曲率半徑。

再次假設流體在運動過程中僅受到壓力及重力作用，以 3.2 節決定沿著流線的作用力所推導的方法，則圖 3.3 中沿法線方向施於在質點的淨力如下表示

$$\sum \delta F_n = \delta W_n + \delta F_{pn} = \left(-\gamma \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial n} \right) \delta V \quad (3.8)$$

方程式中垂項流線的壓力梯度可表示為 $\partial p / \partial n$ 。將 3.7 與 3.8 式合併，而且沿著垂直流線方向的路徑 $\cos \theta = dz/dn$ (見圖 3.3)，則在垂直方向可得下列運動方程式

$$-\gamma \frac{dz}{dn} - \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\rho V^2}{\mathcal{R}} \quad (3.9)$$

3.9 式的物理意義，說明質點在流動方向（亦即曲線
徑 $\mathcal{R} < \infty$ ）的改變程度，主要受垂直流線方向的壓力梯度與流體
質點重量的影響。在於穩定、無黏性且不可壓縮流動下，將 3.9 式
作積分後，可得垂直流線方向之牛頓第二定律的最終形式為

$$p + \rho \int \frac{V^2}{\mathcal{R}} dn + \gamma z = \text{橫跨流線的常數} \quad (3.10)$$

例題 3.3 垂直流線的壓力變化

■ 已知—

圖 E3.3a、b 分別代表兩種圓形流線的流場，其速度依次如下

$$(a) \quad V(r) = (V_0/r_0)r$$

及

$$(b) \quad V(r) = \frac{(V_0 r_0)}{r}$$

式中 V_0 是 $r = r_0$ 處之速度。

■ 試求—

試決定每個流場的壓力分布 $p = p(r)$ ，其中已知在 $r = r_0$ 處 $p = p_0$ 。

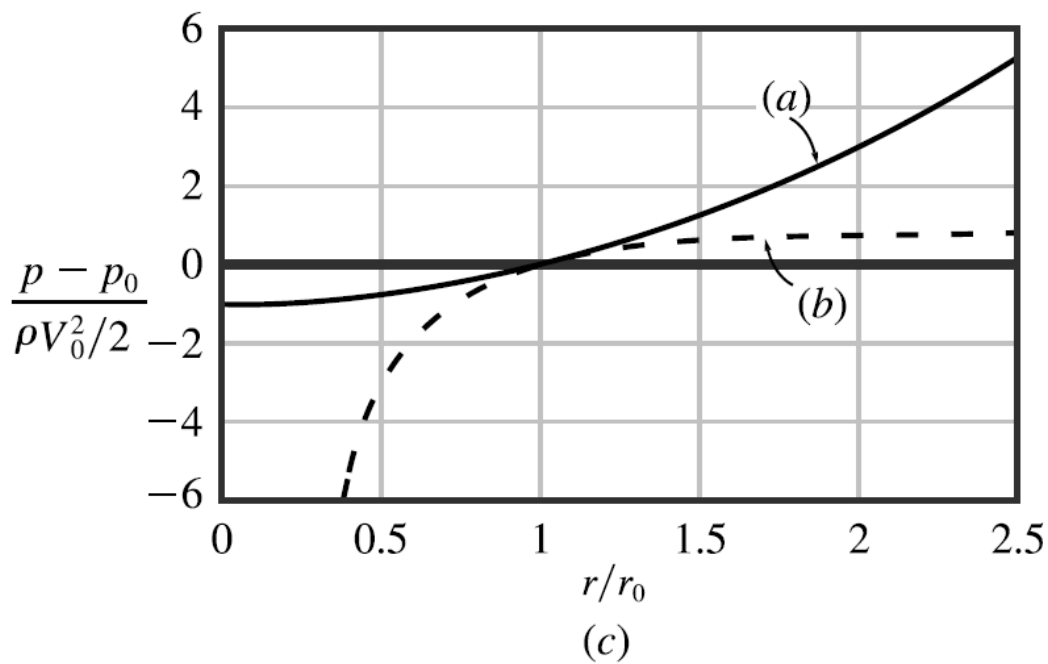
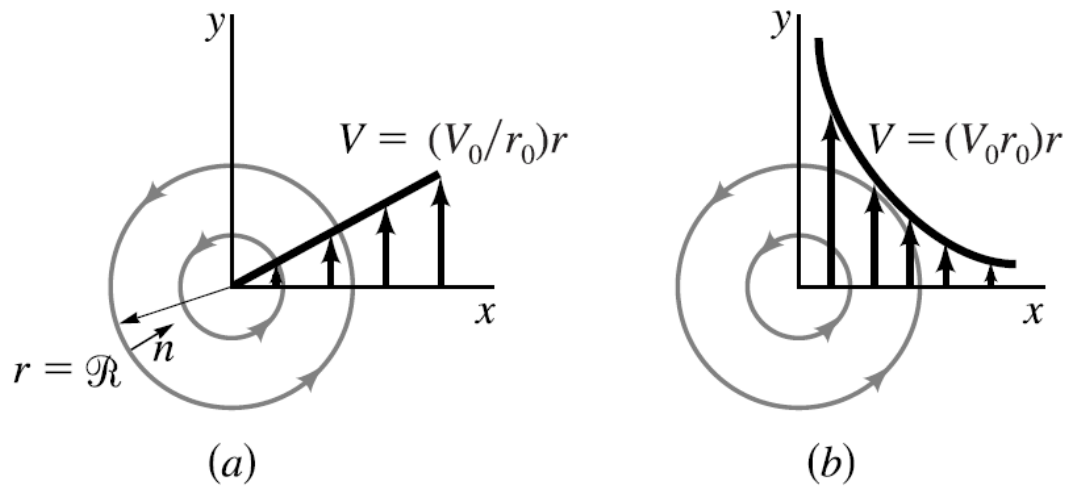


圖 E 3.3

解答

我們假設流動狀況為穩定、無黏性、不可壓項，而且所有流線在一水平面（ $dz/dn = 0$ ）。因流線為圓形，則 n 軸指向與徑向座標方向相反，即 $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$ ，而曲率半徑設定為 $\mathcal{R} = r$ 。故 3.9 式可寫成

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho V^2}{r}$$

對於 (a) 例而言

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho(V_0/r_0)^2 r$$

對於 (b) 例則為

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho(V_0 r_0)^2}{r^3}$$

對任一例子而言，因 $\partial p / \partial r > 0$ ，所以壓力隨 r 增加而增加。將上列兩方程式對 r 積分，已知 $r = r_0$ 處的壓力 $p = p_0$ 作為積分下限

$$p - p_0 = (\rho V_0^2 / 2) [(r/r_0)^2 - 1] \quad (\text{Ans})$$

所以 (a) 例之壓力分布為

$$p - p_0 = (\rho V_0^2 / 2) [1 - (r_0/r)^2] \quad (\text{Ans})$$

而 (b) 例之壓力分布可見圖 E3.3c。

■ 註解一

因速度分布的不同，使在 (a) 與 (b) 例中需要平衡離心加速度所產生的壓力分布是不相同的。事實上，在 (a) 例中，當 $r \rightarrow \infty$ 時，壓力會無止境地增加，但對 (b) 例來說，當 $r \rightarrow \infty$ 時，壓力則趨近於一有限值。但是，本題中對每個例子的流線模式是相同。

實際上，(a) 例表示剛體旋轉（如同一罐水放在已旋轉起來的旋盤上），而 (b) 例代表自由旋渦（free vortex；似於龍捲風或是水在排放時產生的旋轉，「浴頂旋渦」）。

3.4 物理解釋

Physical Interpretation

柏努利方程式的另一種形式是以比重量 γ 除 3.6 式每一項

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z = \text{沿著流線的常數} \quad (3.11)$$

在此方程式每一項的單位為長度，代表某種形式的水頭。

高度項 z 與質點的位能相關而稱為**高度頭**（elevation head）。壓力項 p/γ ，項為**壓力頭**（pressure head）代表產生 p 所需的流體柱高度。速度項 $V^2/2g$ ，稱為**速度頭**（velocity head）代表流體自由落下時，從靜止達到速度 V 的垂直掉落距離。柏努利方程式敘述在同一流線上，任意點之壓力頭、速度頭與高度頭的總和為一定值。

例題 3.4 動能、位能與壓力能

■ 已知—

考慮水由注射筒噴出如圖 E3.4 所示。柱塞受力量作用後，造成注射筒內點 (1) 的壓力大於大氣壓力。水從針孔點 (2) 處以相當高速速度噴出而靠慣性滑行到軌道的頂點點 (3) 處。

■ 試求—

應用柏努利方程式，討論在點 (1)、(2) 和 (3) 之能量 (energy)。

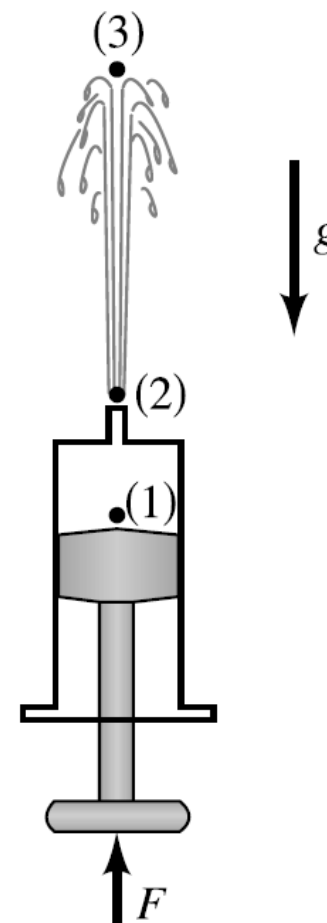


圖 E 3.4

解答

假設柏努利方程式的假設（穩定且沒有黏性、不可壓縮流動）大抵成立，則流動可以用劃分水的總能量的各項來解釋。根據 3.11 式三種形式能量（動能、位能與壓力能）的總和，或三種形式水頭（速度頭、高度頭與壓力頭）的總和必定維持一定值。下列表格說明在圖中所示的三個位置上、三種形式的能量相對大小值，如圖 E3.4 所示。

點	能量形式		
	動能 $\rho V^2/2$	位能 γz	壓力能 p
1	小	零	大
2	大	小	零
3	零	大	零

每種形式能量強度的改變導致運動，使流體由某位置移動到另一位置。下述以另一種方法來考量此種流動，水能從針孔加速噴出是因為在 (1) 與 (2) 之間的有一壓力梯度。在 (2) 與 (3) 間，質點因受到重力作用而產生減項度，使水到達飛行頂點而瞬間停止。

■ 註解一

如果摩擦（黏性）效應是一重項因項時，則在 (1) 與 (3) 之間將造成能量損失，所以在固定的壓力 p_1 下，水絕對不可能到達圖 E3.4 所示的最高點位置。這摩擦可能在注射針內生成（見第 8 章管流），或發生在水流與周遭的空氣之間（見第 9 章外部流）。

流力新知

■ 以水噴射進行狩獵

射水魚以具有射下停在葉上休息昆蟲的能力而聞名，就像水下的水槍一般。牠們將鼻狀物伸出水面，對準被食動物噴射出高速的水注，擊落水面而加以捕食。牠們水槍之槍管是把舌頭放置在嘴上的一溝槽上而形成一管路。藉由快速關上鰓水被迫流經此管路並由舌頭來控制方向。射水魚在魚鰓內產生壓力頭大到噴出水注可達 $2 \sim 3 \text{ m}$ 高，但是牠的精確度僅 1 m 。近來研究顯示射水魚非常熟練地計算牠們獵物會掉落位置。在 100 毫秒內（此反應時間約為人的二倍快），牠取得許多的訊息而預估獵物將掉落的地點。不須再靠視覺信號，牠直接向該點攻擊（見習題 3.18）。

例題 3.5 在流動路線的壓力變化

■ 已知—

考慮圖 E3.5 所示無黏性、不可壓縮且穩定的流動。流體從 A 到 B 的流線為直線，而從 C 到 D 的流線為一圓形路徑。

■ 試求—

- (a) 描述在點 (1) 與 (2) 之間的壓力變化
- (b) 及點 (3) 與 (4) 之間的壓力變化。

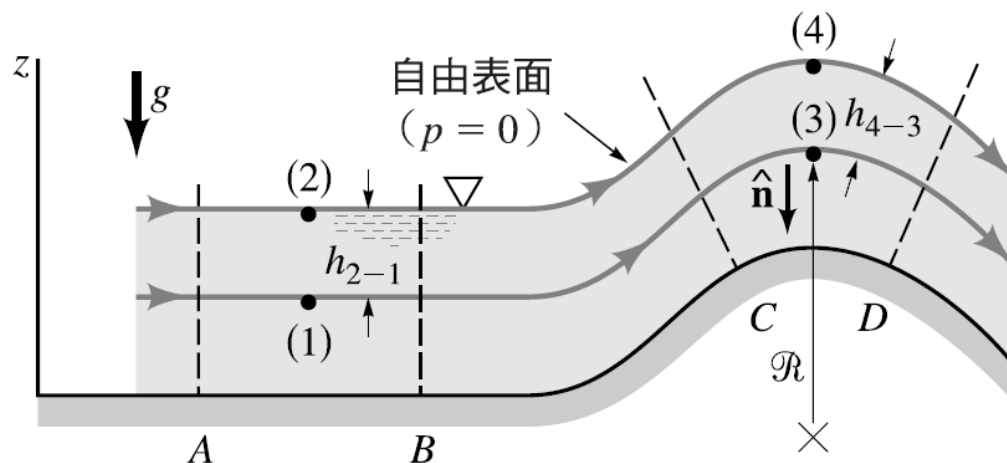


圖 E 3.5

解答

(a) 由先前的假設與實項情況 A 到 B 區域 $\mathcal{R} = \infty$ ，則 3.10 式可寫成

$$p + \gamma z = \text{常數}$$

常數值可藉由兩位置中，對已知變數的估算來決定，使用 $p_2 = 0$ (gage)、 $z_1 = 0$ 而且 $z_2 = h_{2-1}$ ，可得

$$p_1 = p_2 + \gamma(z_2 - z_1) = p_2 + \gamma h_{2-1} \quad (\text{Ans})$$

■註解一

值得注意的是，流線的曲率半徑為無限大，因此在垂直方向的壓力變化與假設流體處於靜止狀態是一樣。

(b) 然而，如果我們應用 3.10 式於點 (3) 與 (4) 之間可得 (利用 $dn = -dz$)

$$p_4 + \rho \int_{z_3}^{z_4} \frac{V^2}{\mathcal{R}} (-dz) + \gamma z_4 = p_3 + \gamma z_3$$

用 $p_4 = 0$ 而且 $z_4 - z_3 = h_{4-3}$ 可得

$$p_3 = \gamma h_{4-3} - \rho \int_{z_3}^{z_4} \frac{V^2}{\mathcal{R}} dz \quad (\text{Ans})$$

■ 註解—

想要求出積分值，則必須能預先得知 V 與 $\mathcal{R}$ 隨 z 的變化情形。即使沒有這詳細資料，我們注意到這積分項為一正值。所以點 (3) 的壓力必定小於液體靜壓值 $\gamma h_4 - 3$ ，其差

$\rho \int_{z_3}^{z_4} (V^2/\mathcal{R}) dz$ 。此較低壓力的產生完全是因為曲狀流線，可使流體在經過曲狀路徑時產生加速（離心加速）。

3.5 靜壓、停滯壓、動壓與總壓

Static, Stagnation, Dynamic, and Total Pressure

3.6 式柏努利方程式的各項因次都是每單位面積所受作用力 - psi 、 lb/ft^2 、 N/m^2 。第一項 p ，是當流體流動時的實際熱力學的壓力。此壓力值的測量可以隨著流體而移動，而相對於正在移動的流體而言其為「靜態」，因此一般稱為**靜壓**（static pressure）。另一種用來測量靜壓的方法是，在平頂的頂面上頂一小孔鎖上一水壓計管，如圖 3.4 所示點 (3) 的位置。

在 3.5 式中的第三項 γz ，稱為液態靜壓（hydrostatic pressure），明顯的與第 2 章所討論的液體靜壓變化有關。雖然，液體靜壓不是流體真正的壓力值，但卻代表著因高度改變而造成位能的變化，進而引起的壓力改變。

柏努利方程式的第二項 $\rho V^2/2$ 稱為**動壓**（dynamic pressure）。利用圖 3.4 可來說明，將小管插入流場並使一端開口對準上游。在開始暫時的流動消失後，液體便能流入管內並達到圖示高度 H 。這時小管中的流體，包括端點 (2) 都處於靜止狀態。換言之 $V_2 = 0$ ，或稱端點 (2) 為**停滯點**（stagnation point）。

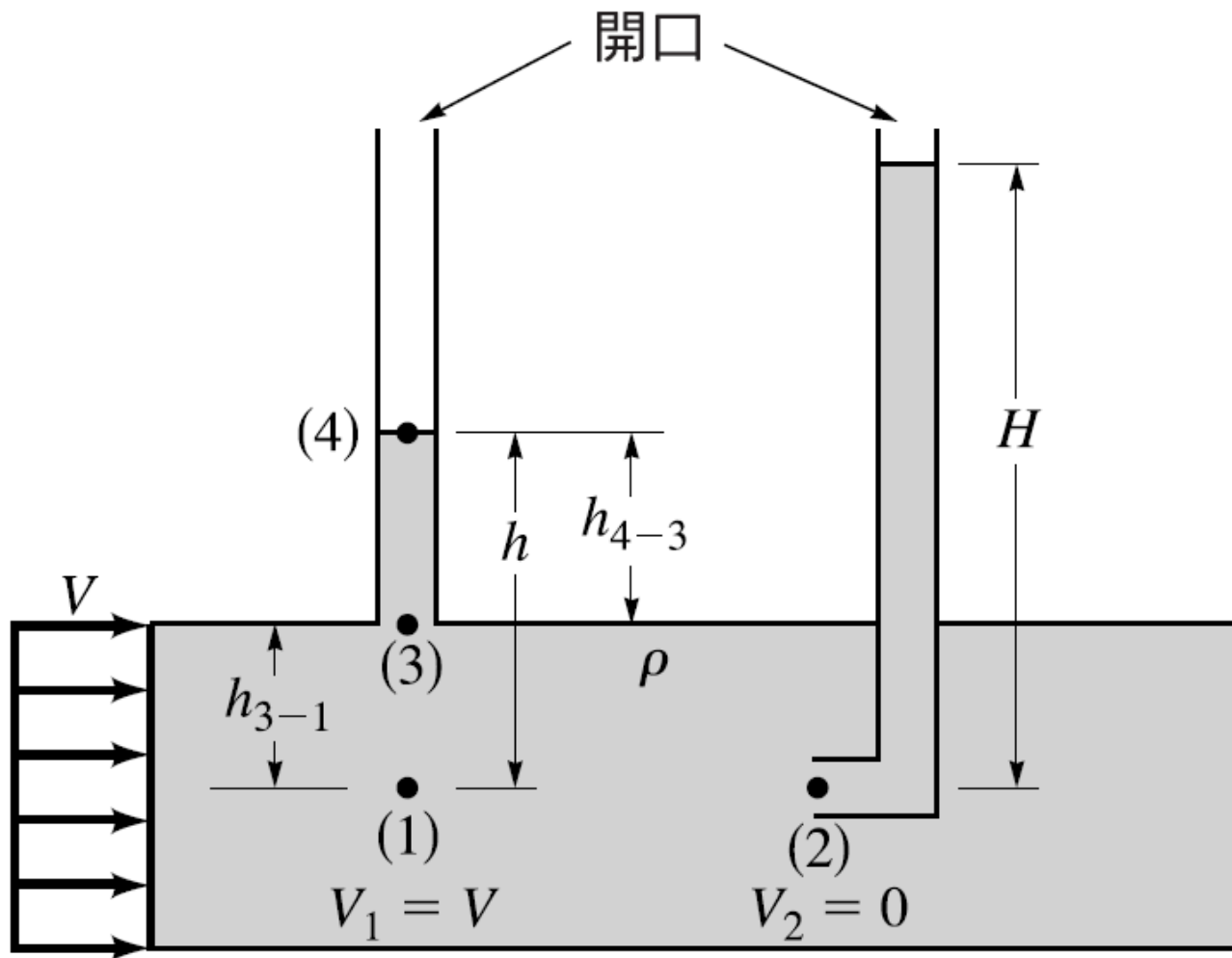


圖 3.4 靜壓與停滯壓的測量。

如果我們在點 (1) 與點 (2) 之間運用柏努利方程式，用 $V_2 = 0$ 且假設 $z_1 = z_2$ ，則

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2$$

因此在停滯點的壓力稱為**停滯壓**（stagnation pressure）是大於靜壓 p_1 ，其差值為 $\rho V_1^2/2$ ，即為動壓。任一固定不動之物體放置在流動的流體中，將可証實在固體表面將有一停滯點（見圖 3.5）。

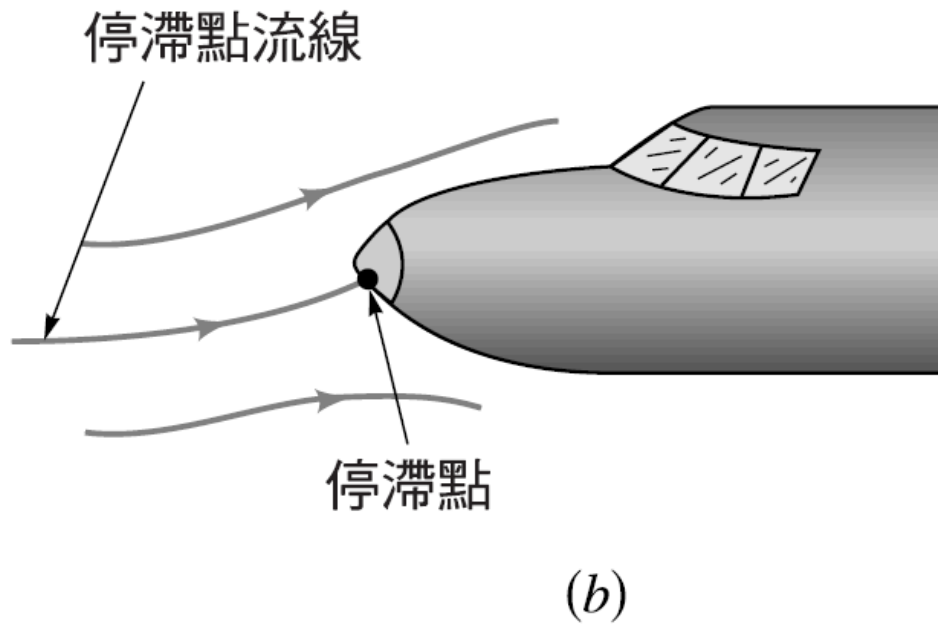
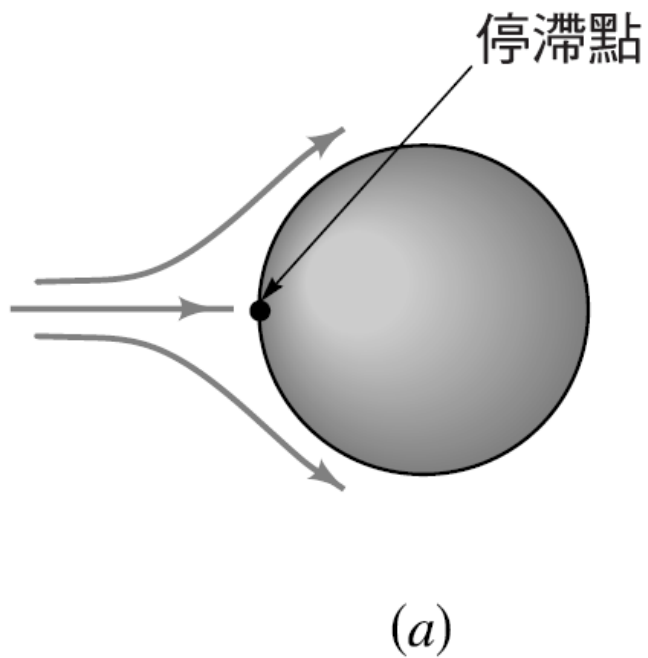


圖 3.5 在流動流體中位於物體上的停滯點。

流力新知

■ 承受壓力的眼睛

我們的眼睛為了正常地運作，其內部需要一定量的內壓。正常壓力值介於 10 到 20 mm 水銀柱高。此壓力是由流入與流出眼睛液體的平衡所決定。如果壓力大於正常值，對離開眼睛的視神經會產生傷害而導致視力視野的減少，稱為青光眼（**glaucoma**）。測量眼內的壓力，可以利用幾種不同非侵入式的儀器，這些儀器全部用以量測當有力量作用在眼球時，其眼球的變形量。有些方法使用一物理學的探針而與眼睛正前方作接觸，施以已知的力而量測變形量。有一非接觸式方法使用經校正的空氣噴氣對著眼睛直吹，且對眼球吹空氣產生停滯壓力而造成眼球微量變形，其變形量大小跟眼球內的壓力有互相關聯（見習題 3.11）。

靜壓、液體靜壓與動壓之總和稱為**總壓**（ total pressure ; p_T ）。柏努利方程式敘述在同一流線上的總壓值維持一定值。亦即

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 + \gamma z = p_T = \text{沿著流線的常數} \quad (3.12)$$

得知流體內靜壓與停滯壓值的資料意味著流體的項率可項項項出。這正是**皮托靜壓管**（ Pitot-static tube ）的基本原理所在。利用兩根同心圓項分別接在兩個壓力項，內項是用來量取開口項端的停滯壓，如圖 3.6 所示，若高度變化可以忽略，則

$$p_3 = p + \frac{1}{2} \rho V^2$$

圖中點 (2) 上游處流體的壓力與速度分別以 p 和 V 表示。
外管在距離端適當位置在頂壁四周鑽數個小孔用來測量靜
壓。如果不考慮點 (1) 與 (4) 之間的高度差，則可得

$$p_4 = p_1 = p$$

上兩式可重新整理得

$$V = \sqrt{2(p_3 - p_4)/\rho} \quad (3.13)$$

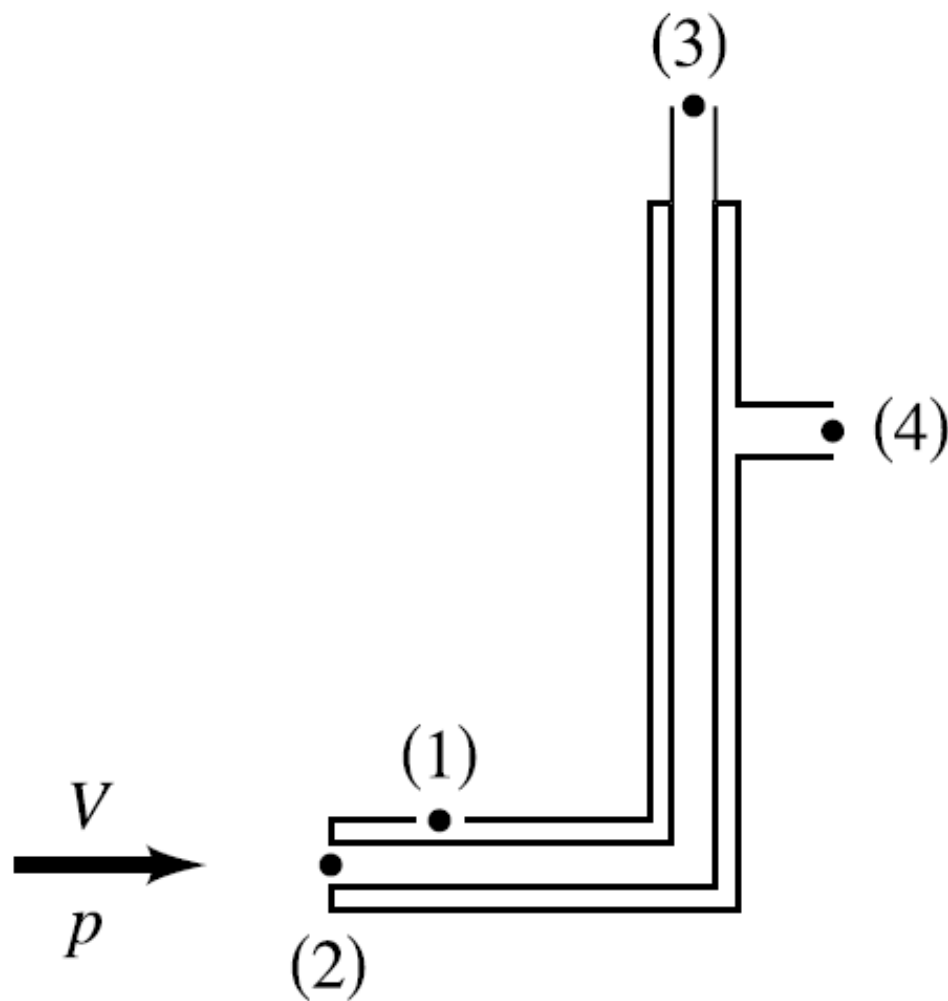


圖 3.6 皮托靜壓管。

例題 3.6 皮托靜壓管

■ 已知—

圖 E3.6a 所示，在 10,000 ft 高空的標準大氣狀態下，一架飛機以 100 mi/hr 的速度飛行。

■ 試求—

在飛機前方遠處點 (1) 的壓力、在飛機鼻部點 (2) 的壓力，與裝置在機身的皮托靜壓管所顯示的壓力差。

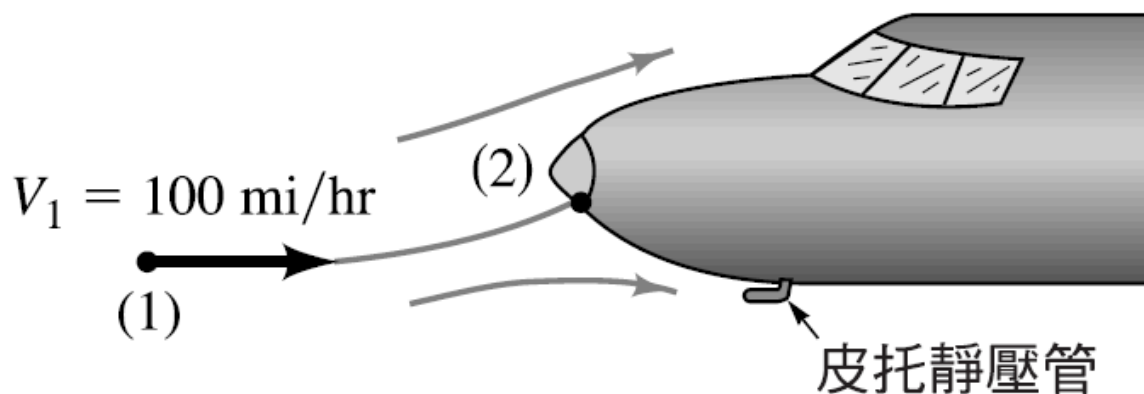


圖 E 3.6

解答

由表 C.1 可查得，在 10,000 ft 高空的靜壓為

$$p_1 = 1456 \text{ lb/ft}^2 (\text{abs}) = 10.11 \text{ psia} \quad (\text{Ans})$$

而密度值 $\rho = 0.001756 \text{ slug/ft}^3$ 。

假設流動為穩定、沒有黏性，且不可壓縮，而點 (1) 與 (2) 之間的高度變化可以忽略之，則 3.6 式可寫成

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2}$$

用 $V_1 = 100 \text{ mi/hr} = 146.7 \text{ ft/s}$ 與 $V_2 = 0$ (將座標系統固定放在飛機上)，可得

$$p_2 = 1456 \text{ lb/ft}^2 + (0.001756 \text{ slugs/ft}^3)(146.7 \text{ ft/s})^2/2$$

$$= (1456 + 18.9) \text{ lb/ft}^2 (\text{abs})$$

因此，錶壓力值為

$$p_2 = 18.9 \text{ lb/ft}^2 = 0.1313 \text{ psi} \quad (\text{Ans})$$

由皮托靜壓管顯示壓差是

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho V_1^2}{2} = 0.1313 \text{ psi} \quad (\text{Ans})$$

■ 註解一

注意若是單位不適當，則將會產生不正確的結果。請勿將 lb/in.^2 與 lb/ft^2 相加。注意 $(\text{slug/ft}^3)(\text{ft}^2/\text{s}^2) = (\text{slug} \cdot \text{ft}/\text{s}^2)/\text{ft}^2 = 1\text{b/ft}^2$ 。

流力新知

■ 堵塞的皮托管

雖然皮托管是測量飛機速的一個簡單設備，但許多的飛機意外事件常因不準確皮托管讀數而造成。這些意外事件的大多數起因是由於一個或多個孔洞遭受堵塞，而未能指示出正確壓力（速率）。通常從發現到起飛過程而可解決此問題的時間又很短，對於此堵塞情形最常見的一個原因不是飛行員（或地勤人員）忘記移去保護皮托管的套子，就是昆蟲在管中築巢而無法以標準目測方式查出。因堵塞皮托管而造成最嚴重的意外事件（以死亡人數計），是波音 757 客機在多明尼加共和國的波多皮拉塔起飛不久即發生。此不正確的速率值自動地輸入電腦而造成自動駕駛儀改變攻角及引擎動力。飛行機員因錯誤指示產生困惑使飛機失速而後衝入加勒比海使全機人員罹難（見習題 3.12）。

3.6 柏努利方程式的使用實例

Examples of Use of the Bernoulli Equation

沿著流線在穩定且無黏性、不可壓縮流動中，(1) 與
(2) 兩點間的柏努利方程式 (3.6 式) 可寫成

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2 \quad (3.14)$$

在本節將討論此方程式的使用。

3.6.1 自由噴束

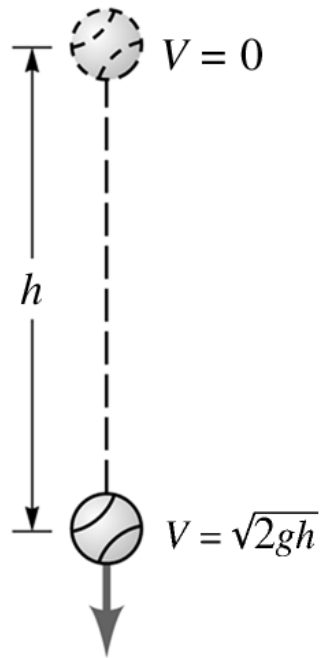
考慮圖 3.7 所示從大型貯槽排出的液體流動。液體噴束經由直徑為 d 的噴嘴以速度為 V 流出。在圖示的流線上 (1) 與 (2) 兩項可應用 3.14 式得

$$\gamma h = \frac{1}{2} \rho V^2$$

我們使用下述事實 $z_1 = h$ 、 $z_2 = 0$ ，貯槽尺寸極大（ $V_1 = 0$ ）、貯槽開口頂接與大氣接頂（ $p_1 = 0$ gage），且流體在噴嘴處以「**自由噴束**」（free jet）形態流出（ $p_2 = 0$ ）。因此我們得到

$$V = \sqrt{2 \frac{\gamma h}{\rho}} = \sqrt{2gh} \quad (3.15)$$

使用 3.15 式時要小心。只有當貯槽足夠大時，此式才成立，因此需忽略初始速率（ $V_1 = 0$ ）、開始與終點壓力相同（ $p_1 = p_2$ ）與不考慮黏度效應。注意如果不考慮摩擦，一項球從靜止掉落至高度 h 後，速度也將是 $V = \sqrt{2gh}$ 。



一旦流體在噴嘴以自由噴束形態朝下流出，其過程中壓力均為零值（ $p_5 = 0$ ）。應用 3.14 式於流線的在點 (1) 與 (5) 之間，可獲得

$$V = \sqrt{2g(h + H)}$$

方程式中， H 代表流體流出噴嘴後再下降的距離。

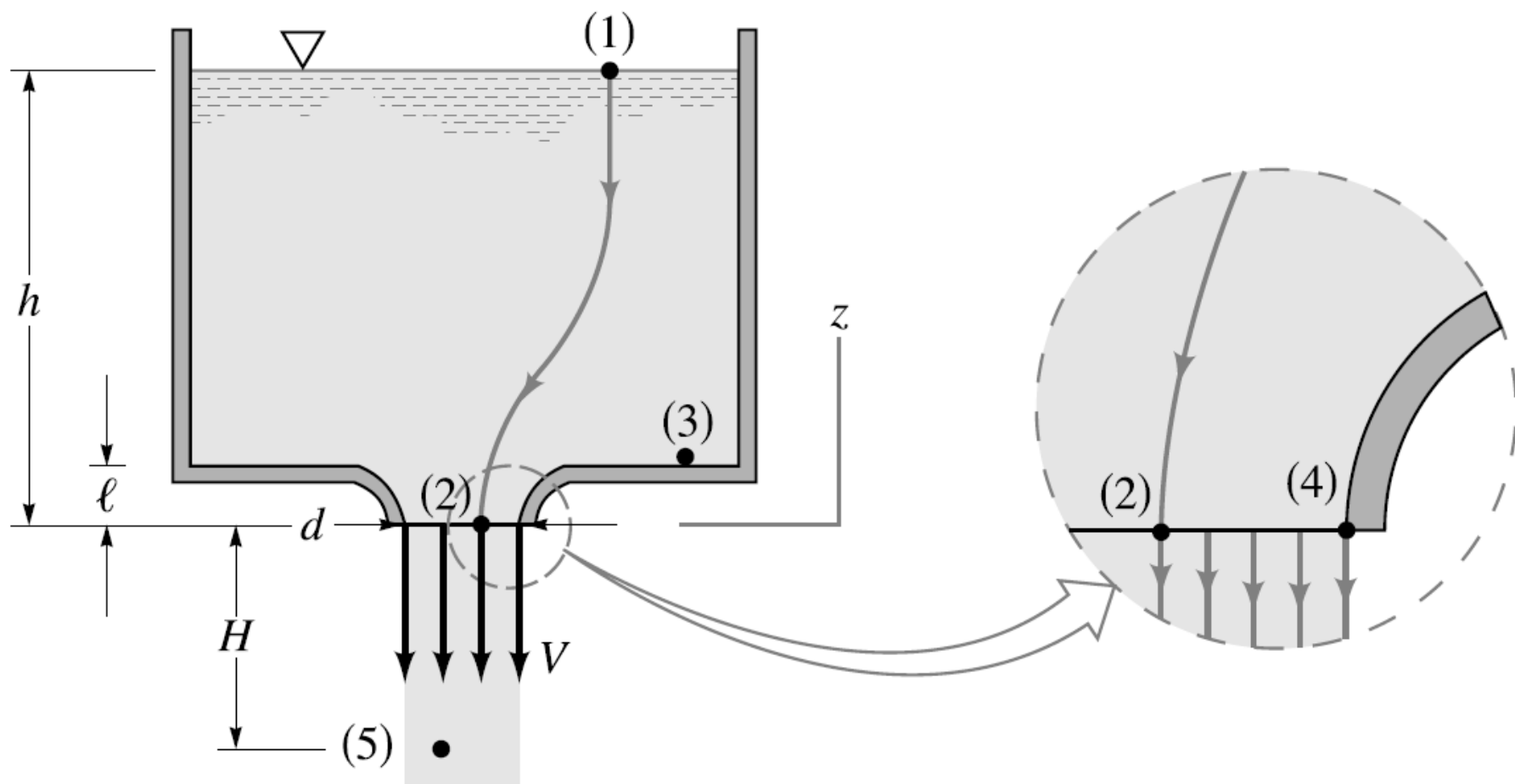


圖 3.7 由貯槽排放之垂直流。

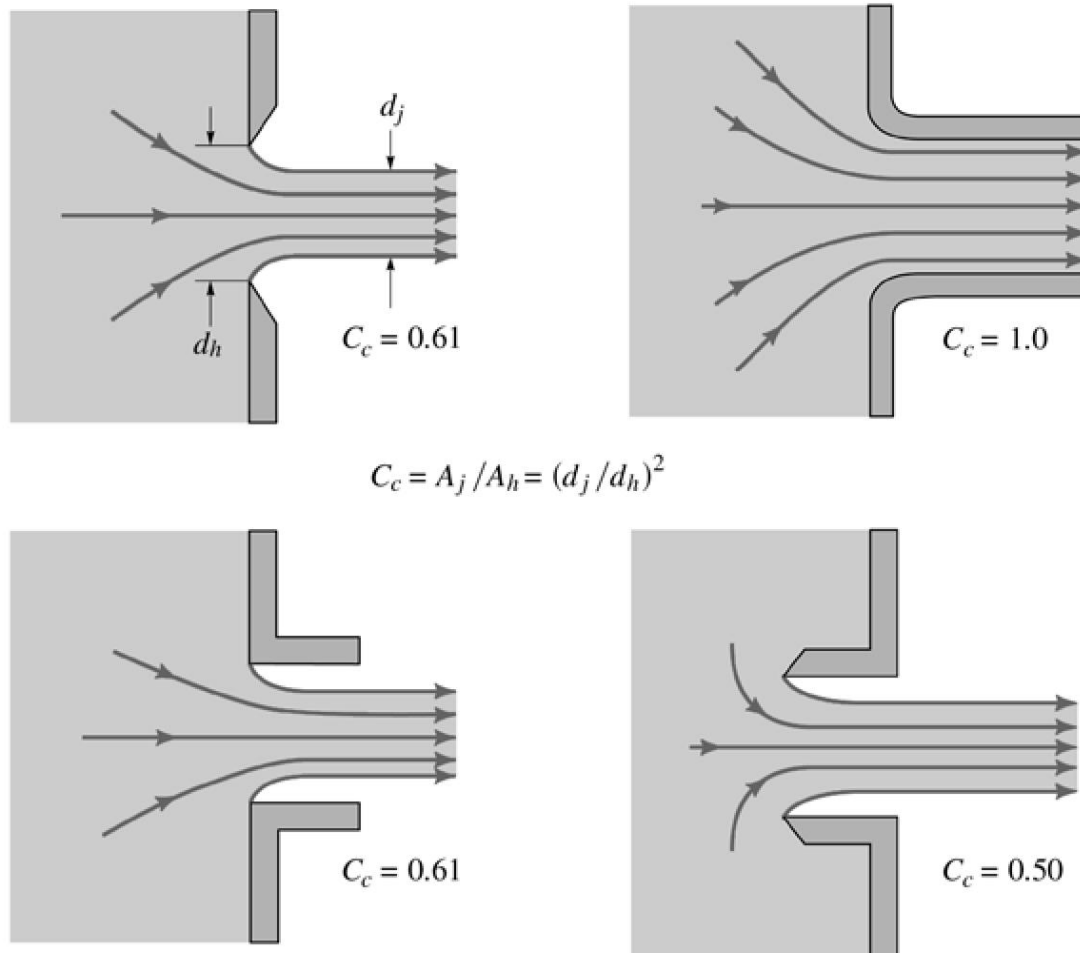


圖 3.8 孔口之幾何形狀所造成的噴束流動形式與各自之收縮係數。

若圖 3.7 中貯槽的出口處不是一平滑、外形佳之噴嘴，噴束的直徑 d_j 將比孔口直徑 d_h 小。此現象為縮流效應（vena contracta effect）。此現象是流體不能做正 90° 角轉彎的結果。

圖 3.8 中註明由實驗而所得的收縮係數（contraction coefficient； C_c ） $C_c = A_j/A_h$ 的典型代表值，方程式中 A_j 與 A_h 分別代表在縮流處的噴束斷面積孔口斷面積。

流力新知

■ 棉花糖、玻璃絨與鋼絲絨

雖然棉花糖和絕緣用玻璃絨是完全不同材料製成，也有完全不同的用途，但是它們是以相類似的製程加工所製成。棉花糖在 1897 年所發明，是由糖的纖維組成。玻璃絨在 1938 年所發明是由玻璃纖維組成。在棉花糖機器裡，糖被融解後利用離心力強迫自旋轉碗上許多小孔洞流出。一旦出現這些細的液態糖流線很快的冷卻而成固態線狀物再以細棒或圓錐筒收集。製作絕緣玻璃絨是有點較為複雜，但基本過程是雷同的。液體玻璃被迫流經很小的孔洞而出現形成很細微的玻璃流線再快速固化。這些糾纏的彈性纖維，玻璃絨，形成一種有效的絕緣材料，主要是因為在纖維間的小空氣孔穴抑制空氣流動。雖然鋼絲絨和線花糖或玻璃絨相似，但製作方法是完全不同。固體鋼線是以一特別刀刃的切削刀口上具有刀槽使初切前長而小的鋼線剝離而形成纏結的鋼絲絨。

3.6.2 限制流

在多數實際案例中，設備內之流體常受限於特定範圍空間內流動，此狀況下無法像前面自由噴束例子般可事先得知壓力大小。因此應該以質量守衡的觀念（連續性方程式）並與配合柏努利方程式。

如圖 3.9 中所示，考慮一流體流經具有進口與出口的固定體積（如貯槽）。假設流體穩定流動，在體積內沒有累積多餘的流體，且流體進入此容積的速率與流體進出此容積的速率相等（否則質點無法達到守恆）。

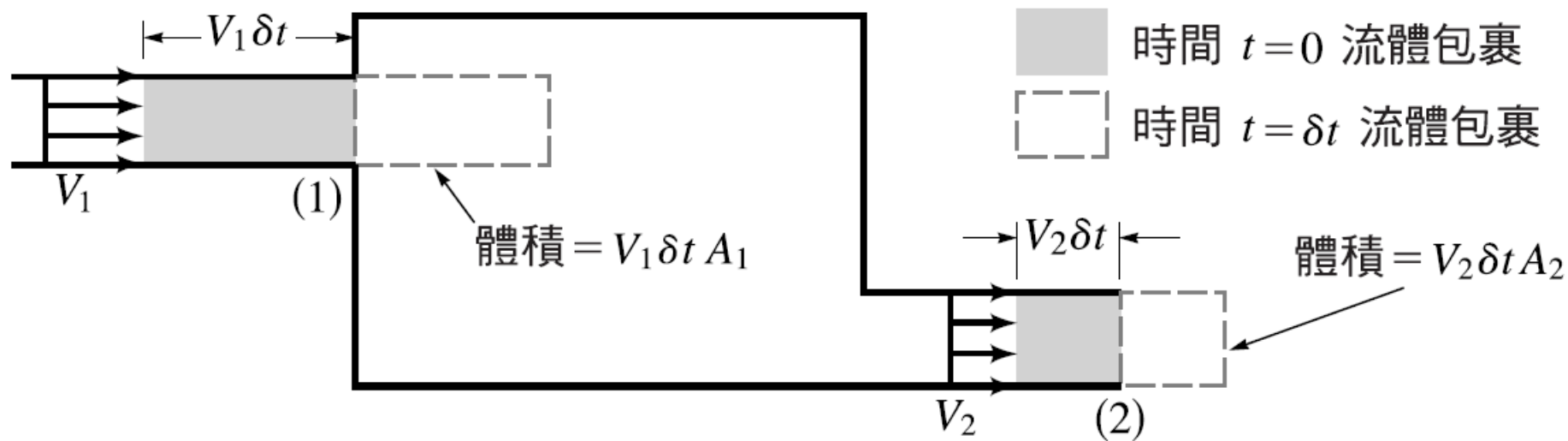


圖 3.9 流入流出貯槽的穩定流。

出口的質量流率 (mass flowrate; m ; slugs/s 或 kg/s) , 公式為 $\dot{m} = \rho Q$, 方程式中 Q (ft³/s 或 m³/s) 為**體積流率** (volume flowrate) 。如果出口面積為 A , 流體以平均速度 V 流過此面積 (垂直於此面積) , 在時間 δt 內 , 流體流經此面積的體積為 $VA \delta t$, 此大小相當於具有為長度 $V \delta t$, 截面積為 A (見圖 3.9) 的體積大小。所以體積流率 (單位時間之體積) 為 $Q = VA$ 。因此 $m = \rho VA$ 。為了質量守衡 , 入口流率必須等於出口流率。

將入口位置記為 (1) 而出口位置記為 (2) , 因此 $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ 。質量守恆式要求

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

如果密度保持為一常數 $\rho_1 = \rho_2$ ，則方程式即為不可壓縮流動的**連續性方程式**（ continuity equation ）

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \text{ , 或 } Q_1 = Q_2 \quad (3.16)$$

例題 3.7 從容器流出的流動（重力驅動）

■ 已知—

有一直徑 $d = 0.1 \text{ m}$ 的水流，從直徑 $D = 1.0 \text{ m}$ 的水桶中穩定流出，如圖 E3.7a 所示。

■ 試求—

如果水位維持定值 $h = 2.0 \text{ m}$ ，則流入水桶內的流率 Q 為何？

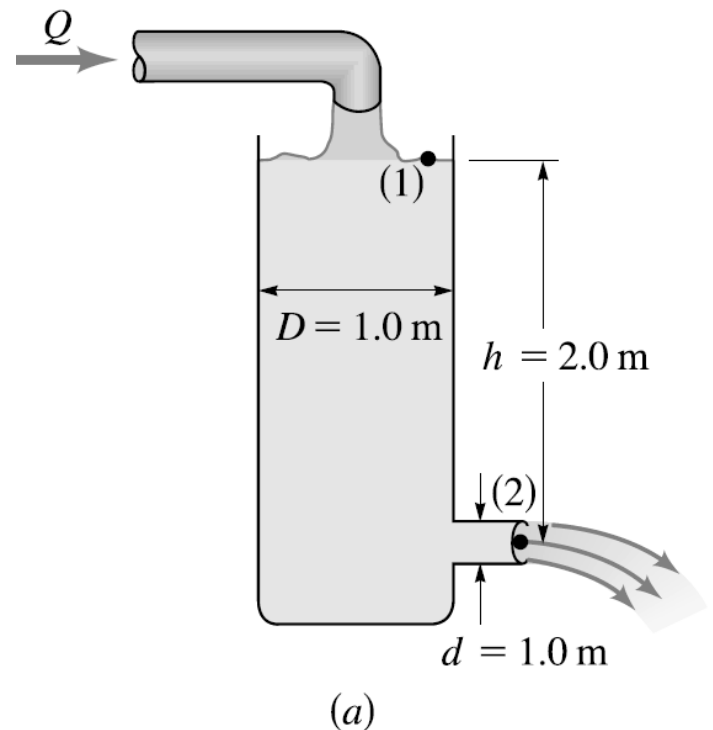


圖 E 3.7

解答

在穩定、無黏性且不可壓縮流動的流體中，點 (1) 與 (2) 間可以柏努利方程式表示為

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \gamma z_2 \quad (1)$$

方程式中 $p_1 = p_2 = 0$ 、 $z_1 = h$ 且 $z_2 = 0$ ，代入 1 式得

$$\frac{1}{2} V_1^2 + gh = \frac{1}{2} V_2^2 \quad (2)$$

雖然，桶內的水位維持常數（ $h = \text{常數}$ ），可是水由水桶流出時會造成截面 (1) 有一平均速度 V_1 。從 3.16 式對於穩定的不

可壓縮流動，質量守恆要求 $Q_1 = Q_2$ ，其中 $Q = AV$ 。因此 $A_1V_1 = A_2V_2$ 或

$$\frac{\pi}{4}D^2V_1 = \frac{\pi}{4}d^2V_2$$

因此

$$V_1 = \left(\frac{d}{D}\right)^2 V_2 \quad (3)$$

結合 1 與 3 式可得

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - (d/D)^4}} = \sqrt{\frac{2(9.81 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ m})}{1 - (0.1 \text{ m}/1 \text{ m})^4}} = 6.26 \text{ m/s}$$

而

$$\begin{aligned} Q &= A_1V_1 = A_2V_2 = \frac{\pi}{4} (0.1 \text{ m})^2(6.26 \text{ m/s}) \\ &= 0.0492 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{Ans}) \end{aligned}$$

■ 註解—

此例題中，我們沒有忽略桶內水的動能（ $V_1 \neq 0$ ）。如果水桶直徑比噴束直徑長（ $D \gg d$ ），所以在 3 式中 $V_1 \ll V_2$ ，則假設 $V_1 \approx 0$ 仍是合理。而此假設所造成的誤差，可從 $V_1 \neq 0$ 計算出的流率 Q 和 $V_1 = 0$ 計算出的流率 Q_0 比值中求得。此比值可寫成

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{V_2}{V_2|_{D=\infty}} = \frac{\sqrt{2gh/[1 - (d/D)^4]}}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (d/D)^4}}$$

為其圖 E3.7b 把結果。在 $0 < d/D < 0.4$ 的範圍中，其流率的比值為 $1 < Q/Q_0 \lesssim 1.01$ ，而在假設 $V_1 = 0$ 下，造成的誤差小於 1%。所以，假設 $V_1 = 0$ 是非常合理。

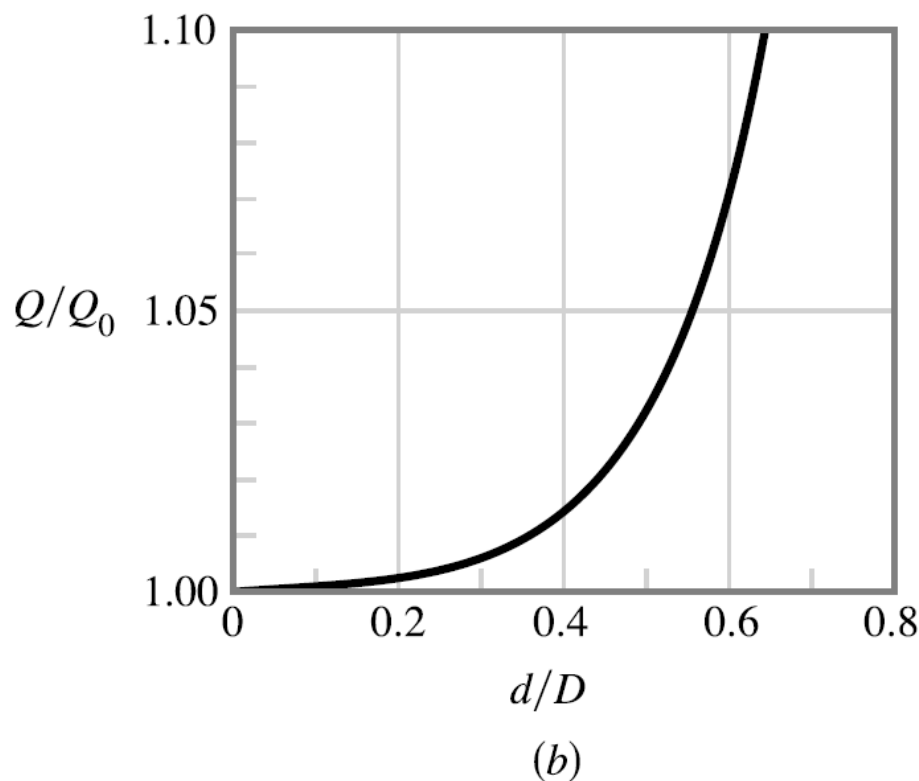


圖 E 3.7

例題 3.8 從容器流出的流動（壓力驅動）

■ 已知—

如圖 E3.8 所示，空氣由貯氣筒穩定地流經一直徑 $D = 0.03 \text{ m}$ 的軟管，而由一直徑 $d = 0.01 \text{ m}$ 的噴嘴排放至大氣中。筒內的壓力維持在 3.0 kPa (gage) 且大氣為標準溫度與壓力的狀態。

■ 試求—

- (a) 軟管中的流率及
- (b) 壓力為何？

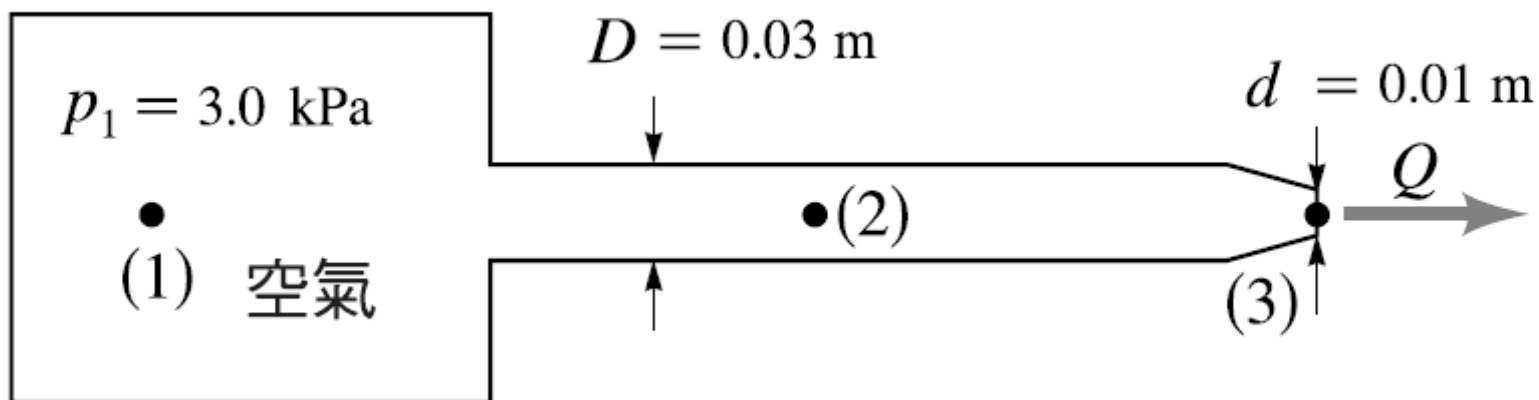


圖 E 3.8

解答

(a) 令流動為穩定、無黏性且不可壓縮，則沿流線的柏努利方程式可寫為

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \gamma z_1 &= p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \gamma z_2 \\ &= p_3 + \frac{1}{2} \rho V_3^2 + \gamma z_3 \end{aligned}$$

在假設 $z_1 = z_2 = z_3$ (水平項項中)， $V_1 = 0$ (貯氣筒極大)
且 $p_3 = 0$ (自由噴束)，則得

$$V_3 = \sqrt{\frac{2p_1}{\rho}}$$

且

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \rho V_2^2 \quad (1)$$

假設筒內空氣依循理想氣體定律，則運用標準絕對壓力與溫度，可
求出空氣的密度值

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{p_1}{RT_1} \\ &= [(3.0 + 101) \text{ kN/m}^2] \\ &\quad \times \frac{10^3 \text{ N/kN}}{(286.9 \text{ N}\cdot\text{m/kg}\cdot\text{K})(15 + 273)\text{K}} \\ &= 1.26 \text{ kg/m}^3\end{aligned}$$

由此，我們找出

$$V_3 = \sqrt{\frac{2(3.0 \times 10^3 \text{ N/m}^2)}{1.26 \text{ kg/m}^3}} = 69.0 \text{ m/s}$$

或

$$\begin{aligned} Q &= A_3 V_3 = \frac{\pi}{4} d^2 V_3 = \frac{\pi}{4} (0.01 \text{ m})^2 (69.0 \text{ m/s}) \\ &= 0.00542 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned} \quad (\text{Ans})$$

■ 註解一

留意 V_3 是依據 p_1 數值（與柏努利方程式有關的假設）來決定的，其與噴嘴的形式並沒有關係。在貯氣筒中的壓力頭 $p_1/\gamma = (3.0 \text{ kPa})/(9.81 \text{ m/s}^2)(1.26 \text{ kg/m}^3) = 243 \text{ m}$ 轉換成在出口處的速度頭 $V_2^2/2g = (69.0 \text{ m/s})^2 / (2 \times 9.81 \text{ m/s}^2) = 243 \text{ m}$ 。雖然，在柏努利方程式中，我們使用錶壓力（ $p_3 = 0$ ），但當計算密度時，若應用理想氣體定律則必須使用絕對壓力。

(b) 在軟管中的壓力值，可從 1 式與連續性方程式（3.16 式）求得

$$A_2 V_2 = A_3 V_3$$

因此

$$\begin{aligned} V_2 &= A_3 V_3 / A_2 = \left(\frac{d}{D} \right)^2 V_3 = \left(\frac{0.01 \text{ m}}{0.03 \text{ m}} \right)^2 (69.0 \text{ m/s}) \\ &= 7.67 \text{ m/s} \end{aligned}$$

代入 1 式可得

$$\begin{aligned} p_2 &= 3.0 \times 10^3 \text{ N/m}^2 - \frac{1}{2} (1.26 \text{ kg/m}^3) (7.67 \text{ m/s})^2 \\ &= (3000 - 37.1) \text{ N/m}^2 = 2963 \text{ N/m}^2 \quad (\text{Ans}) \end{aligned}$$

■ 註解—

在不考慮黏性效應之下，軟管中的壓力會維持常數而且為 p_2 。實際上，壓力從 p_1 至 p_2 到 p_3 遞減，而使空氣產生加速作用，使

在貯氣筒內空氣的動能由原本為零，流經軟管時逐漸增加至中等程度值，而最後在噴嘴出口處達到最大值。因空氣在噴嘴出口處的速度是軟管中空氣速度的九倍，所以絕大部份的壓力項在流經噴嘴時（ $p_1 = 3000 \text{ N/m}^2$ ， $p_2 = 2963 \text{ N/m}^2$ 和 $p_3 = 0$ ）產生。

因壓力從 (1) 到 (3) 的變化並不大〔即絕對壓力表示 $(p_1 - p_3)/p_1 = 3.0/101 = 0.03$ 〕，所以從理想氣體定律得知密度變化亦不重要。故本例題的假設不可壓縮是合理的。但如果貯氣桶內的壓力非常大，或是黏性效應非常重要，前述結果則產生錯誤。

圖 E3.8b,c 為不同噴嘴直徑值， d ，下流率 Q 之計算值。
當噴嘴大開（即較大直徑），則流率增加。注意如果噴嘴直徑
等於軟管直徑，則軟管內壓力等於大氣壓力（零錶壓力）。

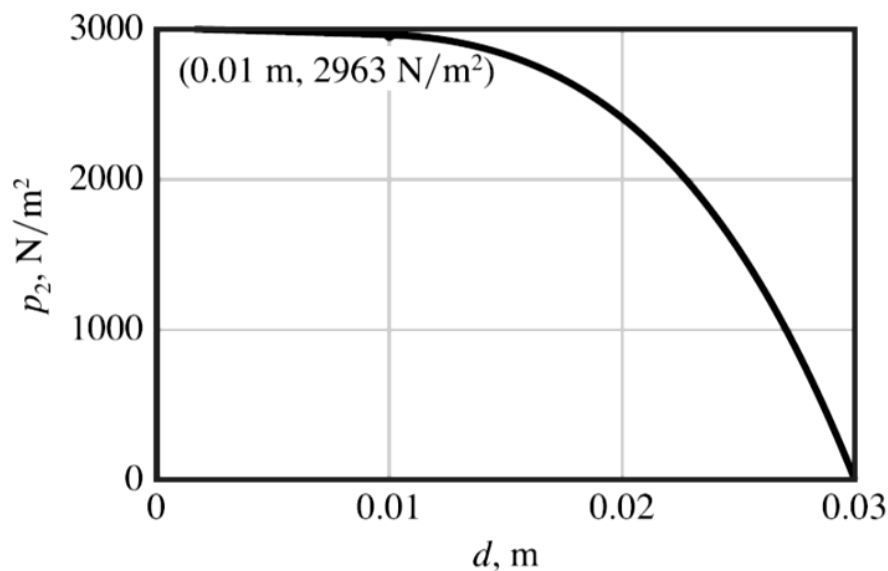


圖 E 3.8 b

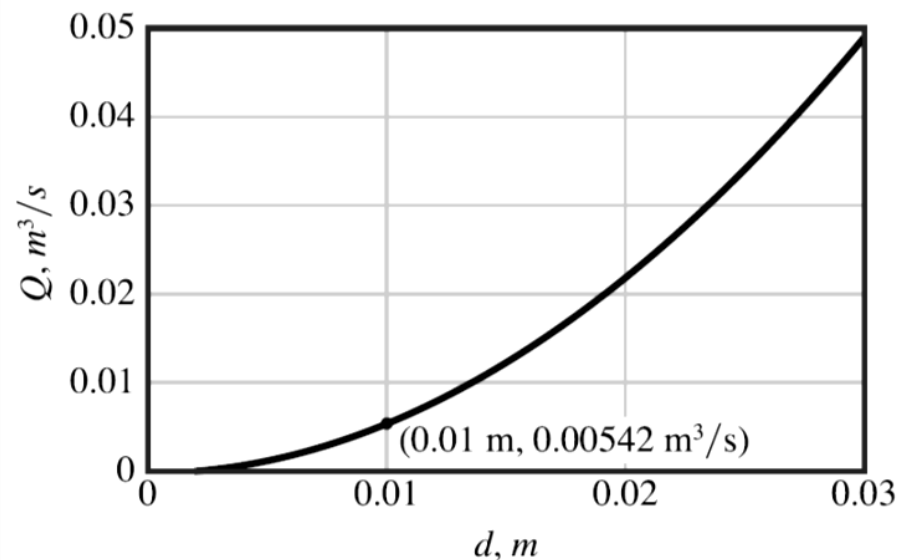


圖 E 3.8 c

流力新知

■ 高科技的人工呼吸器

人工呼吸器常使人聯想到哮喘或支氣管炎的治療。正在進行中的努力是發展一系列呼吸設備不只僅是治療呼吸的疾病而已。它們能夠為糖尿病及其他症狀患者傳送藥物用，藉由噴霧藥物使之到達流經肺部血管支流。此概念是使霧滴變得很小足以穿透肺部小氣囊。肺泡，是血液與外界作交換的地方。利用雷射加工的噴嘴製成，陣列式非常細的小孔使流體流過小孔後分裂成微米級的水滴薄霧。此設計物很適合手上操作而且採用用畢可丟棄的支板，其內含有藥劑封裝的增壓塑膠泡及吸嘴。一個電子致動的活塞驅動在貯容器之液體流經噴嘴陣列，而進入呼吸系統。病人服藥是對著這裝置作呼吸，以人工呼吸器內差壓換能器感知何時病人呼吸已達到接受藥物的最佳時機，此時活塞會被自動地起動。

例題 3.9 在不同截面之管路流動

■ 已知—

水流經一漸縮管，如圖 E3.9 所示。以液體倒置 U 形壓力計測量在點 (1) 和 (2) 的靜壓差，壓力計內部充填比重為 $SG < 1$ 的。

■ 試求—

壓力計的讀數值 h 為何？

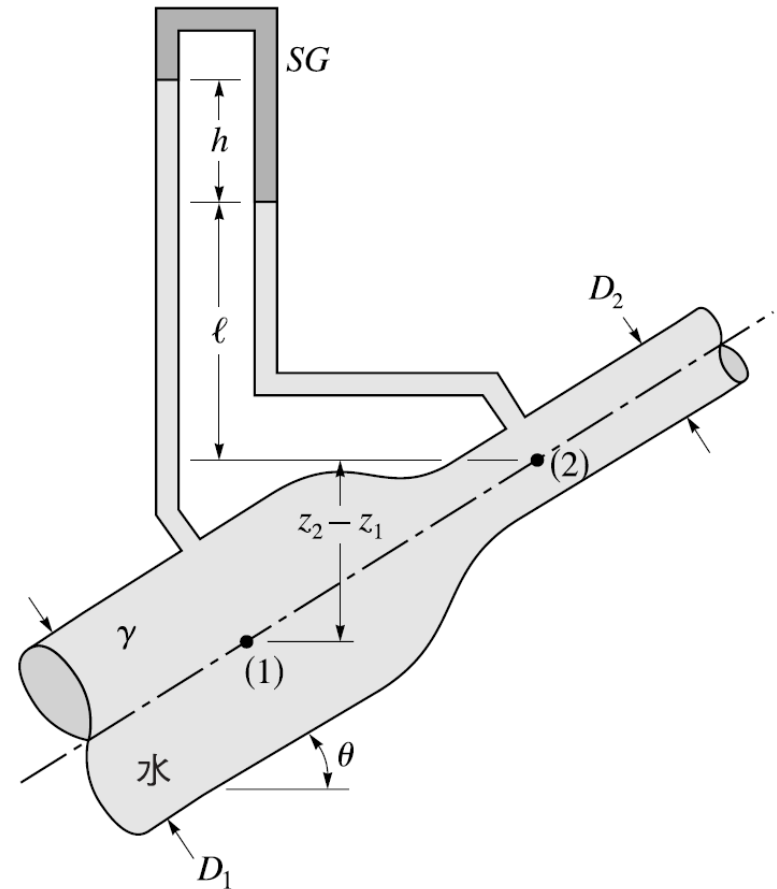


圖 E 3.9

解答

假設在穩定且無黏性、不可壓縮等條件下，則柏努利方程式可寫成為

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \gamma z_2$$

V_1 與 V_2 可從連續性方程式 3.16 式中，提供第二個關係式。令在兩截面的流速是均勻分布，且流體不可壓縮，所以

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

結合以上二式可得

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) + \frac{1}{2} \rho V_2^2 [1 - (A_2/A_1)^2] \quad (1)$$

利用第 2 章所發展的壓力 - 深度觀念來計算壓力計所量測之壓力差，
因此

$$p_1 - \gamma(z_2 - z_1) - \gamma\ell - \gamma h + SG \gamma h + \gamma\ell = p_2$$

或

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) + (1 - SG)\gamma h \quad (2)$$

壓差正如第 2 章的說明，既不是 γh ，也不是 $\gamma(h + z_1 - z_2)$ 。

合併 1 與 2 式，可得到所預期的結果如下

$$(1 - SG)\gamma h = \frac{1}{2} \rho V_2^2 \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]$$

或因 $V_2 = Q/A_2$

$$h = (Q/A_2)^2 \frac{1 - (A_2/A_1)^2}{2g(1 - SG)} \quad (\text{Ans})$$

■ 註解一

高度差 $z_1 - z_2$ 是不需知道，因為此項將會在柏努利方程式及壓力項方程式中同時出現，而合併兩式時就可消去。因為 1 式中出現高度差 $z_1 - z_2$ ，所以其壓差 $p_1 - p_2$ 也受到角度的影響而改變。因此在流率為已知的情況下，壓力項測得的壓差值 $p_1 - p_2$ 將是 θ 的函數，而壓力計讀數 h 則完全和 θ 的數值沒有關係。

一般而言，速度增加會造成壓力減小。如果速度相差非常大，壓差也會非常大。針對流動中液體巨大的壓差值常會造成空化現象，這種潛在的危險情況，經常發生於當液體局部的壓力減低到液體本身蒸汽壓力，而使液體在局部產生「沸騰（boiling）」現象。

在流動液體中產生空化現象的方法之一，是經由柏努利方程式的研判。當流體速度增快時（在流動面積減小情況，如圖 3.10 所示），壓力值隨著降低。當壓力減低量太大（限制流動的流體也會顯著產生加速度），將使液體的局部壓力減少而低於蒸汽壓力。

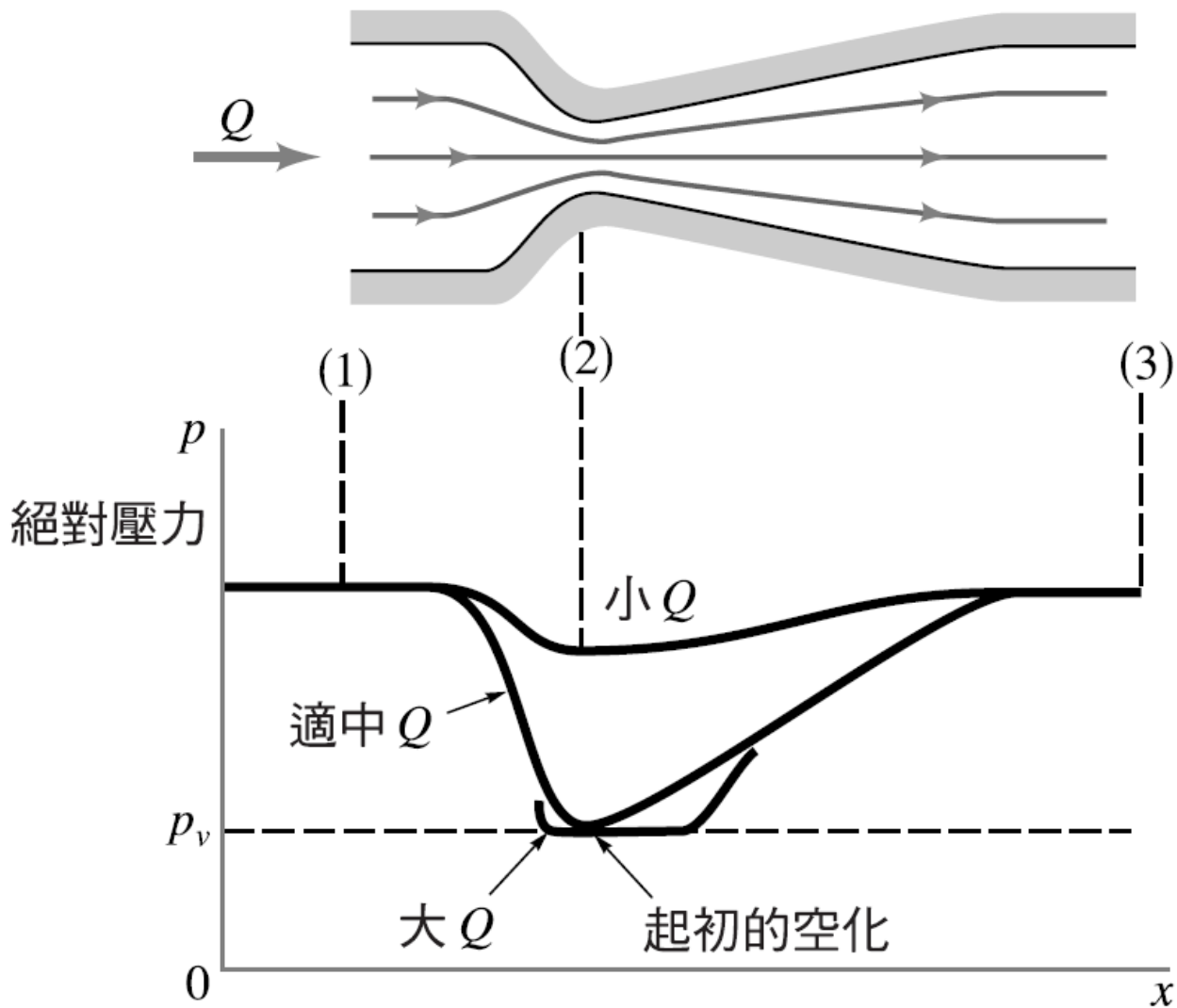


圖 3.10 在不同直徑中的壓力變化與空化發端。

例題 3.10 虹吸與空化現象

■ 已知—

圖 E3.10 所項大型貯槽以等徑水管虹吸排放 60°F 的水。如果要避免在虹吸流動過程產生空化現象。

■ 試求—

試求圖中水管凸起的最大高度 H 為多少？已知虹吸管的尾端在槽底下 5 ft 處且大氣壓力為 14.7 psia。

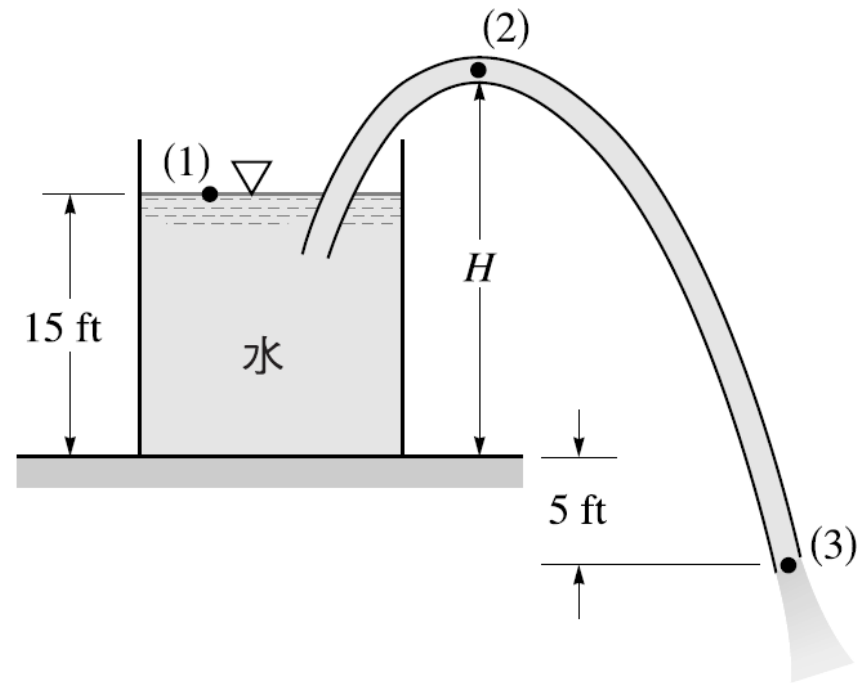


圖 E 3.10 a

解答

令流動為穩定、無黏性且不可壓項，在流線 (1)、(2) 與 (3) 點運用柏努利方程式可得

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \gamma z_2 = p_3 + \frac{1}{2} \rho V_3^2 + \gamma z_3 \quad (1)$$

採用槽底為基準線，則 $z_1 = 15\text{ft}$ 、 $z_2 = H$ 且 $z_3 = 5\text{ft}$ ，而且 $V_1 = 0$ （大型貯槽）、 $p_1 = 0$ （開口槽）、 $p_3 = 0$ （自由噴束）；再配合連續性方程式 $A_2 V_2 = A_3 V_3$ ，或因水管管徑一樣，故 $V_2 = V_3$ 。因此在水管的流體速率為

$$\begin{aligned} V_3 &= \sqrt{2g(z_1 - z_3)} = \sqrt{2(32.2 \text{ ft/s}^2)[15 - (-5)] \text{ ft}} \\ &= 35.9 \text{ ft/s} = V_2 \end{aligned}$$

由 1 式中 (1) 與 (2) 點之間可求得山丘狀水管最高點的壓力 p_2 為

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \gamma z_1 - \frac{1}{2} \rho V_2^2 - \gamma z_2 = \gamma(z_1 - z_2) - \frac{1}{2} \rho V_2^2 \quad (2)$$

水在 60°F 時，由表 B.1 可查出，蒸汽壓力為 0.256 psia。因此，本系統中起初的空化發生的最低壓力為 $p = 0.256$ psia。從 2 式與圖 E3.10a 中詳細考察，將項實此最低壓必定會在水管凸起頂端產生。因在點 (1) 壓力以項壓力表示 ($p_1 = 0$)，故在點 (2) 須使用錶壓力，因此 $p_2 = 0.256 - 14.7 = -14.4$ ，代入 2 式得

$$\begin{aligned} & (-14.4 \text{ lb/in.}^2)(144 \text{ in.}^2/\text{ft}^2) \\ &= (62.4 \text{ lb/ft}^3)(15 - H)\text{ft} - \frac{1}{2}(1.94 \text{ slugs/ft}^3)(35.9 \text{ ft/s})^2 \end{aligned}$$

或

$$H = 28.2 \text{ ft} \quad (\text{Ans})$$

H 值若太大，則在點 (2) 處將產生蒸汽泡形成，就可能會使虹吸作用停止。

■ 註解—

注意我們在整個解題過程中可使用絕對壓力 ($p_2 = 0.256 \text{ psia}$ 且 $p_1 = 14.7 \text{ psia}$)，其結果也一定是一樣。當點 (3) 的高度愈低時，則水流率將愈大，所以 H 值就要愈小。我們也可以在 (2) 與 (3) 點間運用柏努利方程式求得相同的 H 值，其中 $V_2 = V_3$ 。本例子中，並不需要於 (1) 與 (3) 點間運用柏努利方程式決定 V_2 值。

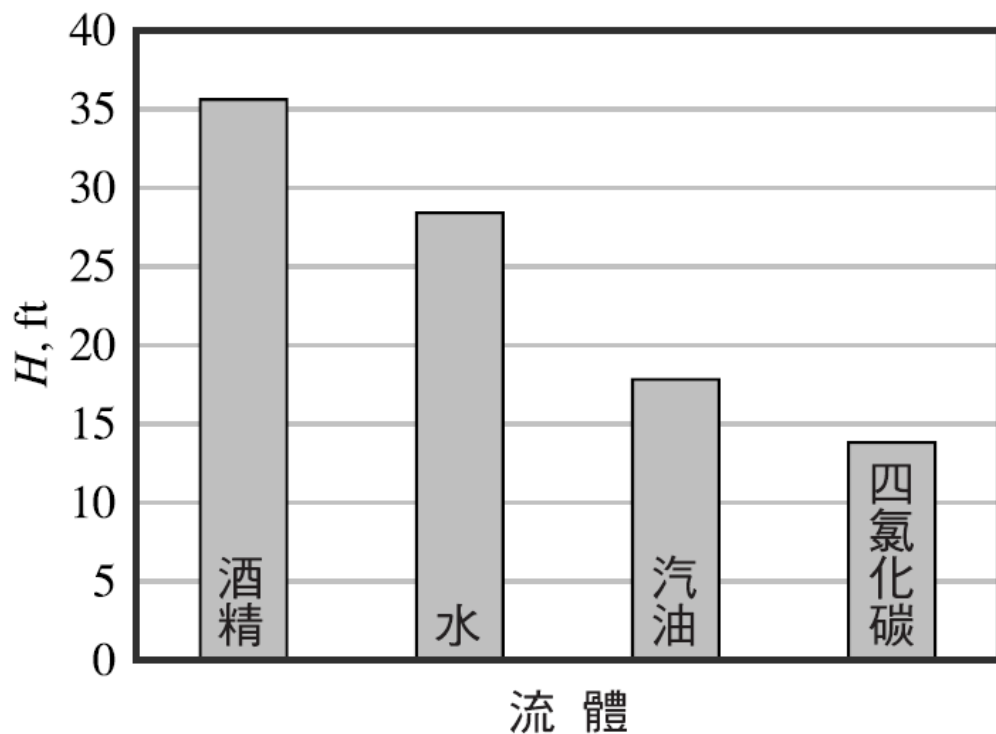


圖 E 3.10 b

以上的結果與水管的直徑與長度（如果黏度影響不重要）無關。避免水管內外側所形成的大壓力差下而產生癟掉的情形是適當的水管設計的重點。

圖 E3.10b 為表 1.5 之流體性質重新計算所得之 H 計算值。 H 值是流體比重量 r 及該流體蒸發壓力 P_v 的函數。

3.6.3 流率測量

利用柏努利方程式的基本原理可發展出許多種形式的流體項度或流率測量儀器。

如圖 3.11 所示，一種有效方法測量管中的流率為在通道中安裝某種限制物，經測量上游截面 (1) 的低流速、高壓力及下游截面 (2) 的高流速、低壓力之間的壓力差。圖中顯示為三種基本的**流量計**（flowmeter）：孔口計（orifice meter）、噴嘴計（nozzle meter）與文氏管計（Venturi meter）。此三種流量計的操作都應用相同的物理原理 - 速度增加將造成壓力減小。

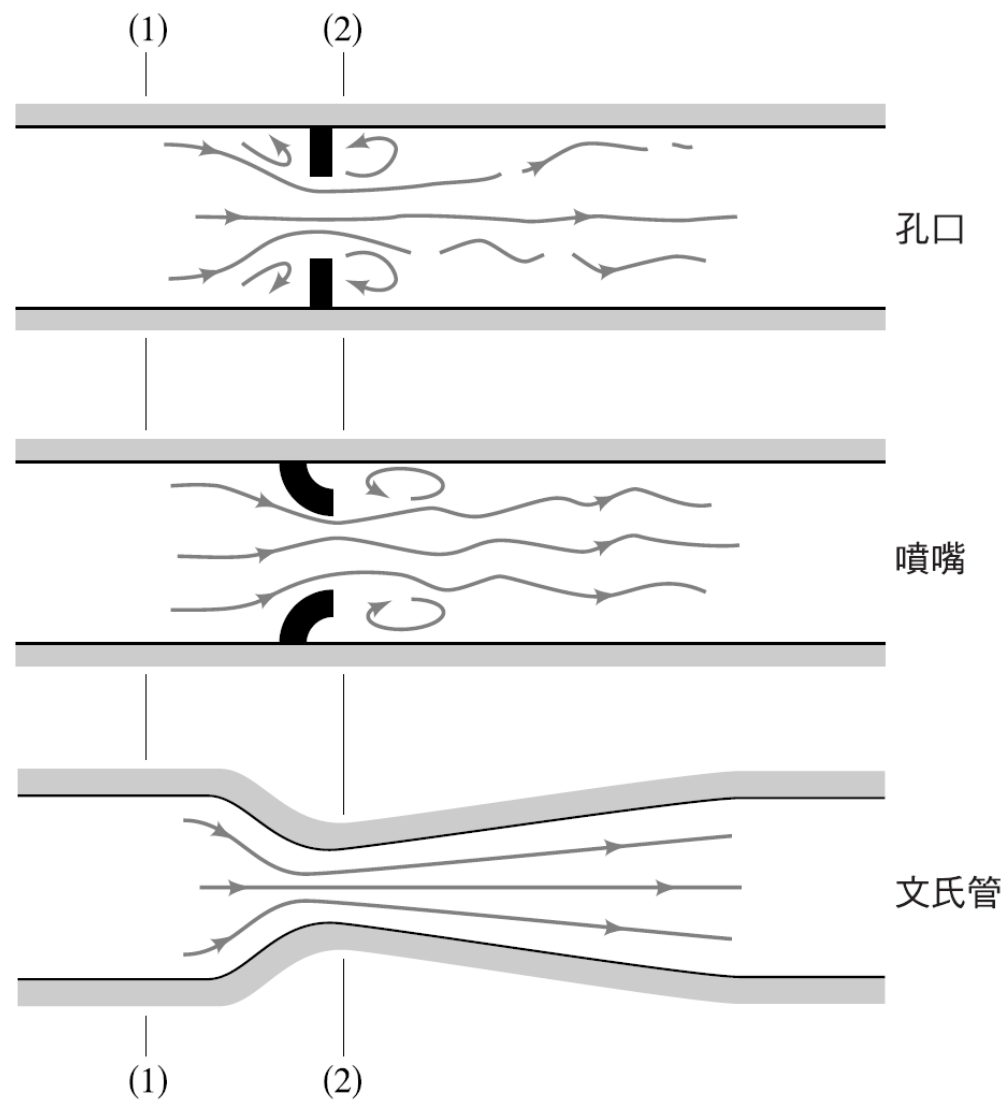


圖 3.11 管路中測量流率的典型裝置。

我們假設點 (1) 與 (2) 間流動為水平 ($z_1 = z_2$) 、穩定、無黏性且不可壓縮。柏努利方程式為

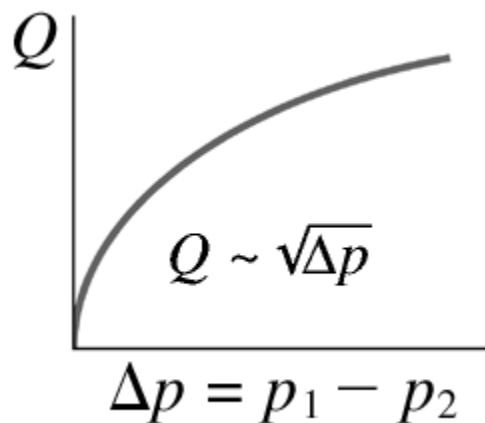
$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

另外，連續性方程式可寫成

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

方程式中， A_2 代頂截面 (2) 的小流動面積 ($A_2 < A_1$) 。合併上兩式可得下列理論的流率為

$$Q = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}} \quad (3.17)$$



因為在 3.17 式的推導過程中，「實際世界」與假設條件有各種各樣的差異，將會使實項測量得到的流率 Q_{actual} 小於理論計算的流率。這些流率的差異（是相當一致，小從 1 至 2%，而大可至 40% 的誤差值，而誤差大小完全視所選用的幾何形式而定）將保留到第 8 章再進一步討論。

例題 3.11 文氏管計

■ 已知—

如圖 E3.11a 所示，煤油（ $SG = 0.85$ ）流經一文氏管計，而其流率介於 0.005 至 $0.050 \text{ m}^3/\text{s}$ 之間。

■ 試求—

此範圍間的流率，其壓力差之範圍值為何？

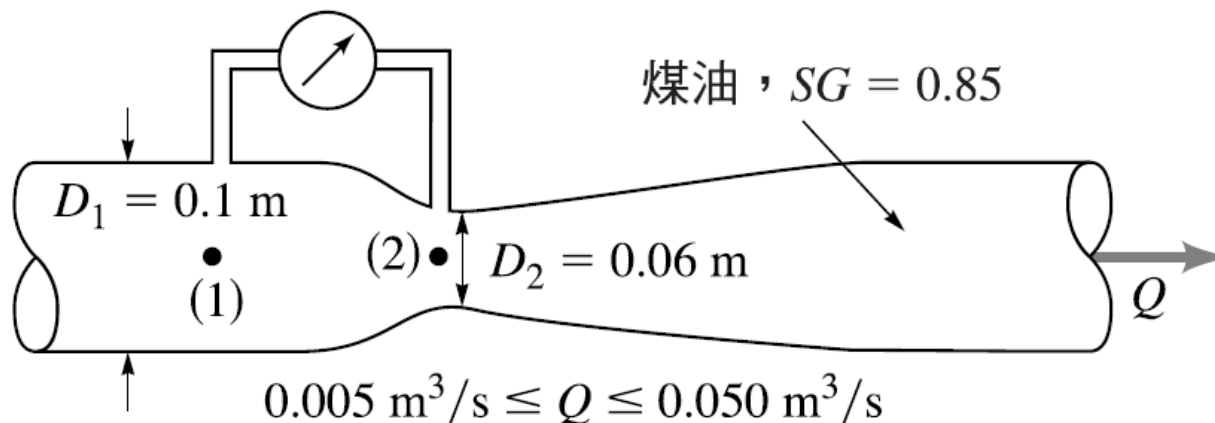


圖 E 3.11 a

解答

令流動為穩定、無黏性且不可壓縮，則流率與壓力的關係式為 3.17 式。加以重新整理可得

$$p_1 - p_2 = \frac{Q^2 \rho [1 - (A_2/A_1)^2]}{2A_2^2}$$

流動流體的密度為

$$\rho = SG \rho_{\text{H}_2\text{O}} = 0.85(1000 \text{ kg/m}^3) = 850 \text{ kg/m}^3$$

此面積比為

$$A_2/A_1 = (D_2/D_1)^2 = (0.06 \text{ m}/0.10\text{m})^2 = 0.36$$

最小流率時，其對應的壓差為

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= (0.005 \text{ m}^3/\text{s})^2 (850 \text{ kg/m}^3) \frac{(1 - 0.36^2)}{2[(\pi/4)(0.06 \text{ m})^2]^2} \\ &= 1160 \text{ N/m}^2 = 1.16 \text{ kPa} \end{aligned}$$

同樣地，最大流率時對應的壓差為

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= (0.05)^2 (850) \frac{[1 - (0.06/0.10)^4]}{2[(\pi/4)(0.06)^2]^2} \\ &= 1.16 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \\ &= 116 \text{ kPa} \end{aligned}$$

因此

$$1.16 \text{ kPa} \leq p_1 - p_2 \leq 116 \text{ kPa} \quad (\text{Ans})$$

這些數值表示在無黏性、穩定且不可壓縮的狀況下流體的壓力差。本例項中，其求得的理想解答與使用流量計的形式 - 孔口、噴嘴或文氏管計（見圖 3.11）都無關。

■ 註解一

3.17 式證明流率係隨壓力差的平方根變化。從數值結果，如圖 E3.11b 所示得知，壓力差增加一百倍，則流率增加十倍。這樣的非線性關係，導致測量大範圍流率時，會造成相當大的困難。解決此大範圍測量的問題，常利用壓力換能器來協助測量。另一個解決的方法，是將兩個流量計並聯使用，其中一個在較大的流率範圍中操作，另一個在較小流率範圍中操作。

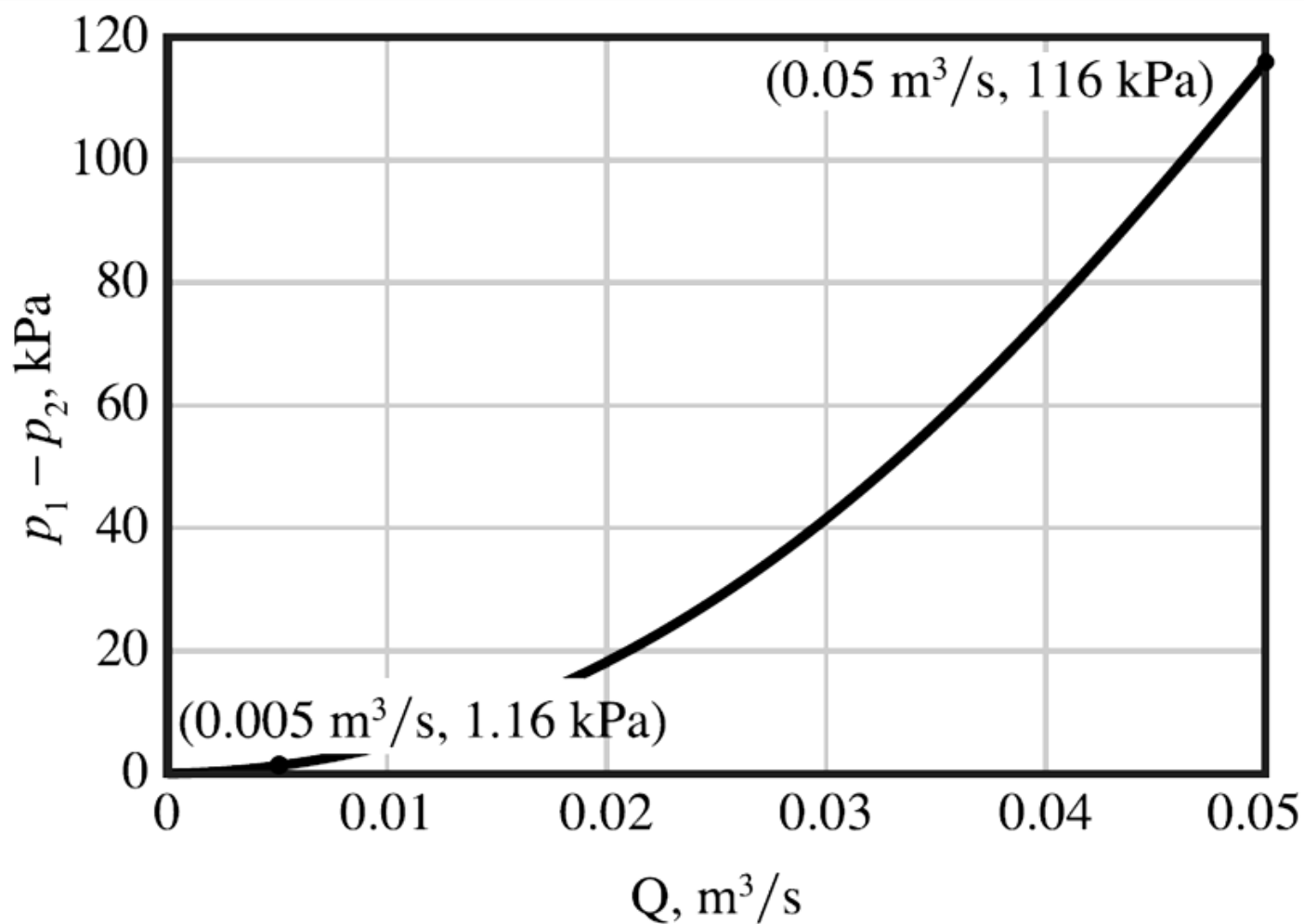


圖 E 3.11 *b*

某些流量計以柏努利方程式為基礎應用在明渠測量流率，例如引水道與灌溉溝等流動問題。圖 3.12 中的閘門一個例子。

我們運用柏努利及連續性方程式於自由表面 (1) 至 (2) 之間得

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \gamma z_2$$

且

$$Q = A_1 V_1 = b V_1 z_1 = A_2 V_2 = b V_2 z_2$$

因為 $p_1 = p_2 = 0$ ，合併上二式且重新整理得流率如下

$$Q = z_2 b \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_2)}{1 - (z_2/z_1)^2}} \quad (3.18)$$

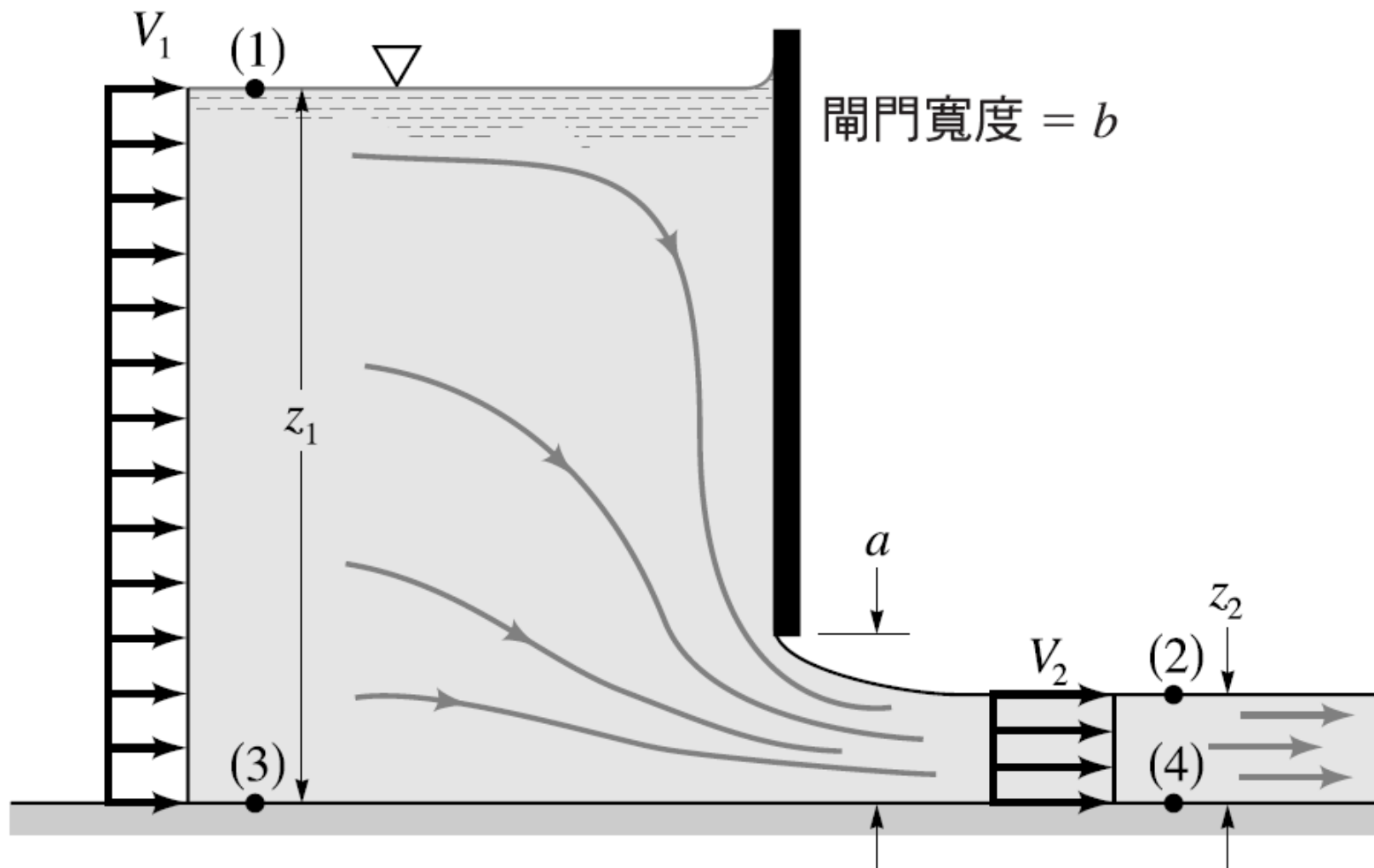


圖 3.12 閘門的幾何構圖。

例題 3.12 閘門

■ 已知—

如圖 E3.12a 所示，水從閘門下方流出。

■ 試求—

單位閘門寬度之近似流率。

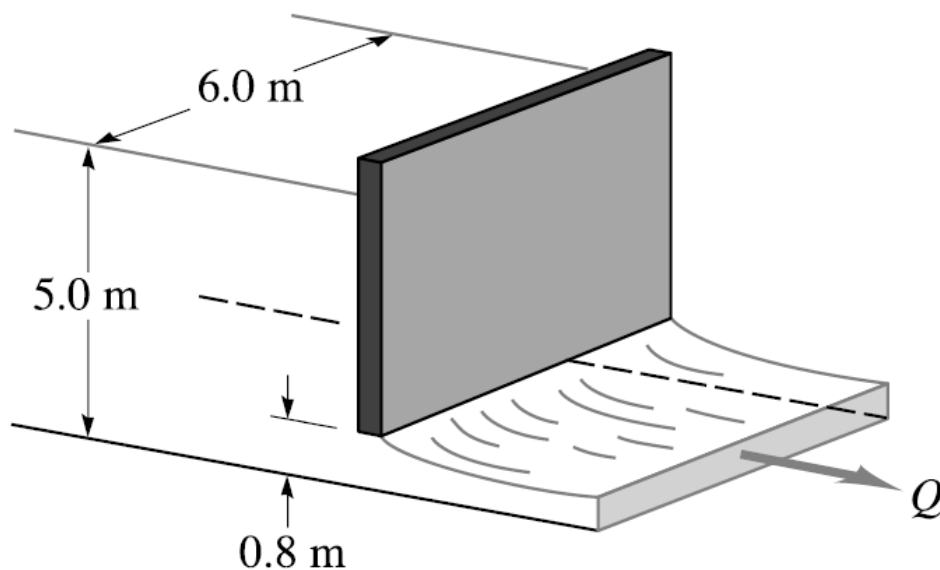


圖 E 3.12 a

解答

令流動為穩定、無黏性且不可壓縮的情況下，運用 3.18 式，將可獲得單位閘門寬度的流率 Q/b 為

$$\frac{Q}{b} = z_2 \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_2)}{1 - (z_2/z_1)^2}}$$

本例中 $z_1 = 5.0$ 、 $a = 0.80$ m 故 $a/z_1 = 0.16 < 0.20$ ，依照此值可假設收縮係數是 0.61。因此可得到 $z_2 = C_c a = 0.61(0.80 \text{ m}) = 0.488 \text{ m}$ ，將數據代入上式中，就可得單位閘門寬度的流率為

$$\begin{aligned}\frac{Q}{b} &= (0.488 \text{ m}) \sqrt{\frac{2(9.81 \text{ m/s}^2)(5.0 \text{ m} - 0.488 \text{ m})}{1 - (0.488 \text{ m}/5.0 \text{ m})^2}} \\ &= 4.61 \text{ m}^2/\text{s}\end{aligned}\quad (\text{Ans})$$

■ 註解一

若我們假設 $z_1 \gg z_2$ ，且將上游流體的動能忽略，可得

$$\frac{Q}{b} = z_2 \sqrt{2gz_1} = 0.488 \text{ m} \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(5.0 \text{ m})} = 4.83 \text{ m}^2/\text{s}$$

如果深度比值很大（ $z_1/z_2 = 5.0/0.488 = 10.2$ ），則不管是否把 V_1 的效應納入考慮，對 Q 值而言，將不會產生太大的變化。因此，跟下游的動能比較下，通常忽略閘門上游的動能是合理的。

圖 E3.12b 是以不同深度 z_1 值，重新計算的數值。注意流率跟深度是不成正比。因此例如水災時 $z_1 = 5 \text{ m}$ 變為 $z_1 = 10 \text{ m}$ 單位閘門流率不會是原來的兩倍，而只是由 $4.61 \text{ m}^2/\text{s}$ 增加到 $6.67 \text{ m}^2/\text{s}$

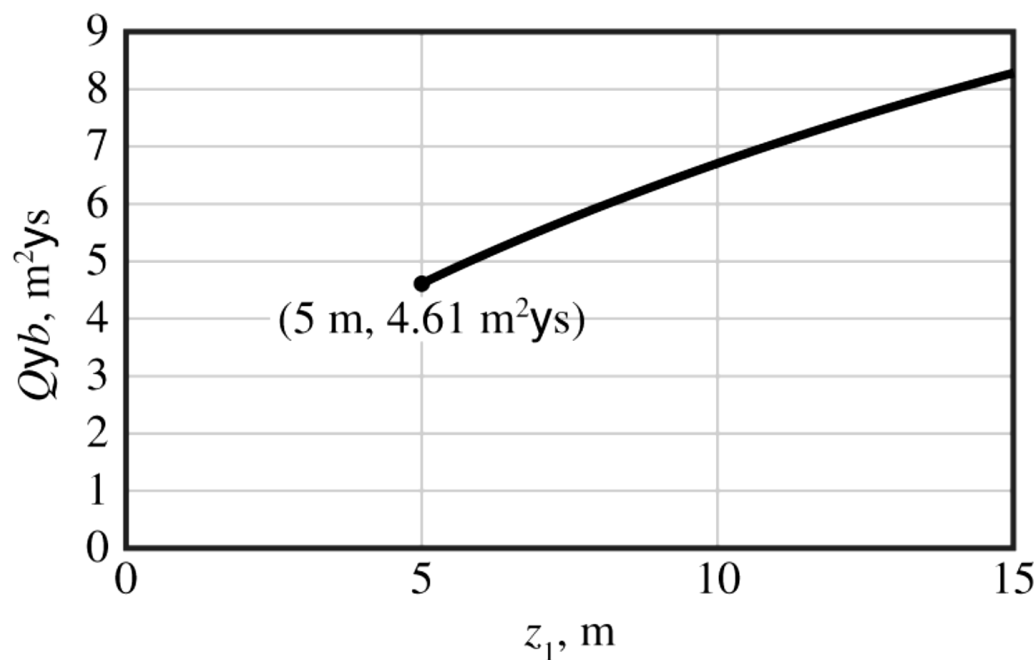


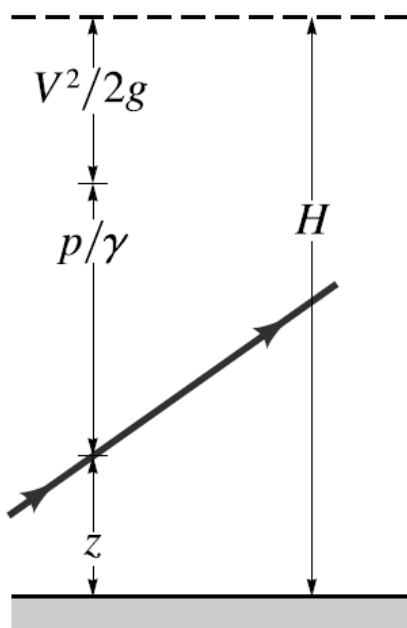
圖 E 3.12 b

3.7 能量線與水力梯度線

The Energy Line and the Hydraulic Grade Line

透過水力梯度線（hydraulic grade line；HGL）與能量線（energy line；EL）的觀念是一種有效解釋柏努利方程式的方法。此種理念係用幾何方式解釋來代表流動。

當流動是穩定、無黏性且不可壓縮，柏努利方程式描述為在同一流線的壓力頭、速度頭與高度頭的總和必然為一常數。此常數稱為總水頭（total head； H ），如左側圖所示




$$\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z = \text{沿流線的常數} = H \quad (3.19)$$

流體質點沿一流線上可用的總水頭之連線稱為能量線。在圖 3.13 中的能量線的高度是以皮托管測量停滯壓力而求得。在皮托管尖端的停滯點可測得流動的總水頭（或能量）。另一方面，將靜壓分接頭連接測壓計管，所測得結果代表壓力頭與高度頭之和（ $p/\gamma + z$ ）稱為測壓計水頭（piezometric head）。

如圖 3.13 所示，在流場的另一位置的皮托管測量出相同的總水頭。然而，高度頭、速度頭與壓力頭值的大小沿著流線而隨時變動。

沿管路以皮托管所量取的高度軌跡稱為能量線 EL。而以一連串測壓管計量取高度的軌跡則稱水力梯度線 HGL。依柏努利方程式的基本假設，通常能量線為水平。但是如果流體沿著流線的速度有所變動時，水力梯度線將不會維持水平。

在圖 3.14 中可看出，在大型貯槽中，管路流動的能量線與水力梯度線的分布情形。令此為穩定、不可壓縮且無黏性的流動，則能量線的高度應等於貯槽液面的高度，且為一水平線。而水力梯度線則在能量線下方，而兩線高度差則代表速度頭 $V^2/2g$ 。

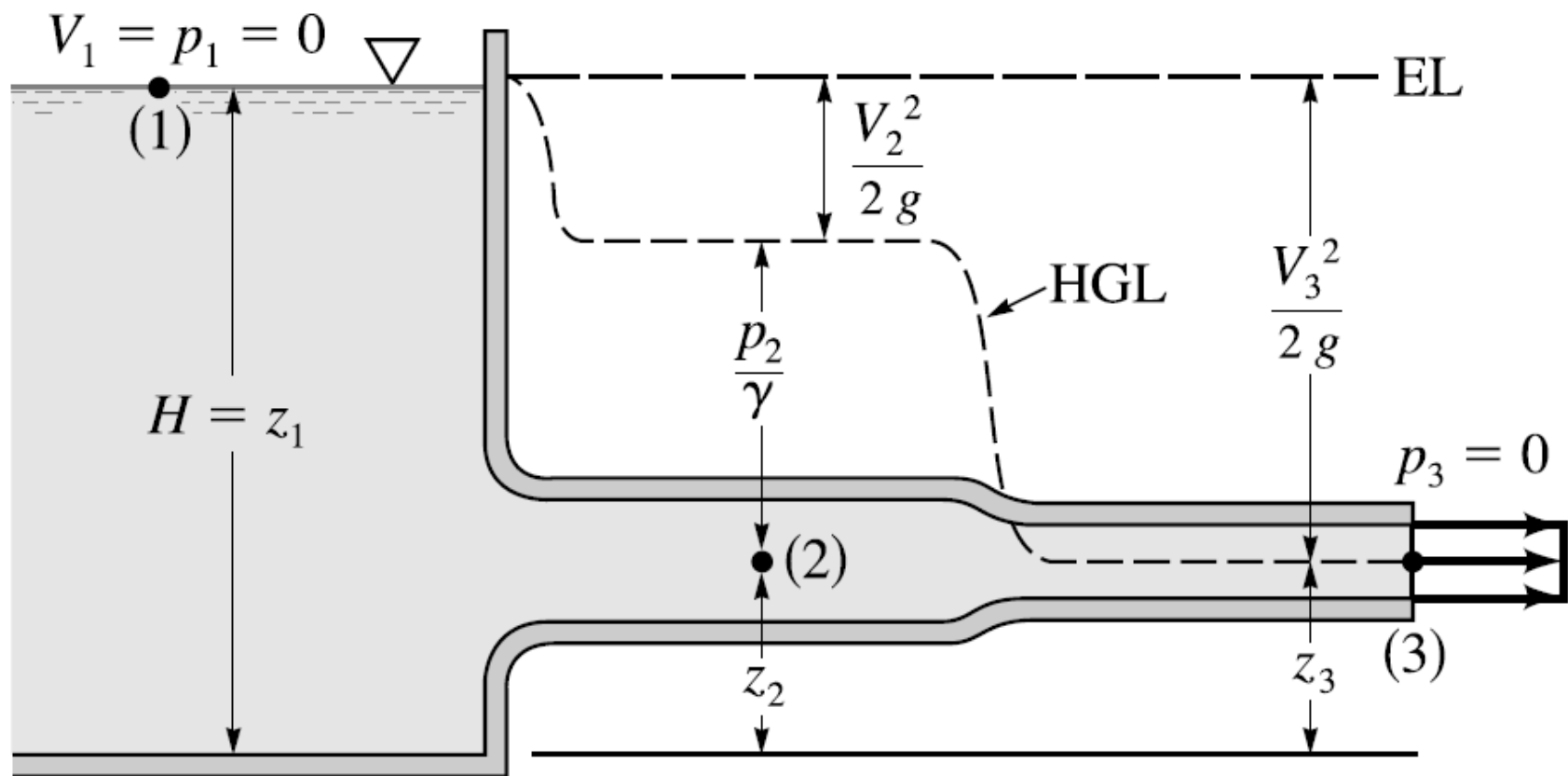


圖 3.14 從大型貯槽經管路流動的能量線與水力梯度線的分布情形。

如圖 3.15 所示，管的中心線和水力梯度線之間的高度差，代表管中的壓力大小。如果管的中心線低於水力梯度線，則管內壓力數值為正（壓力大於大氣壓力）；如果管的中心線高於水力梯度線，則管內壓力數值為負（壓力小於大氣壓力）。

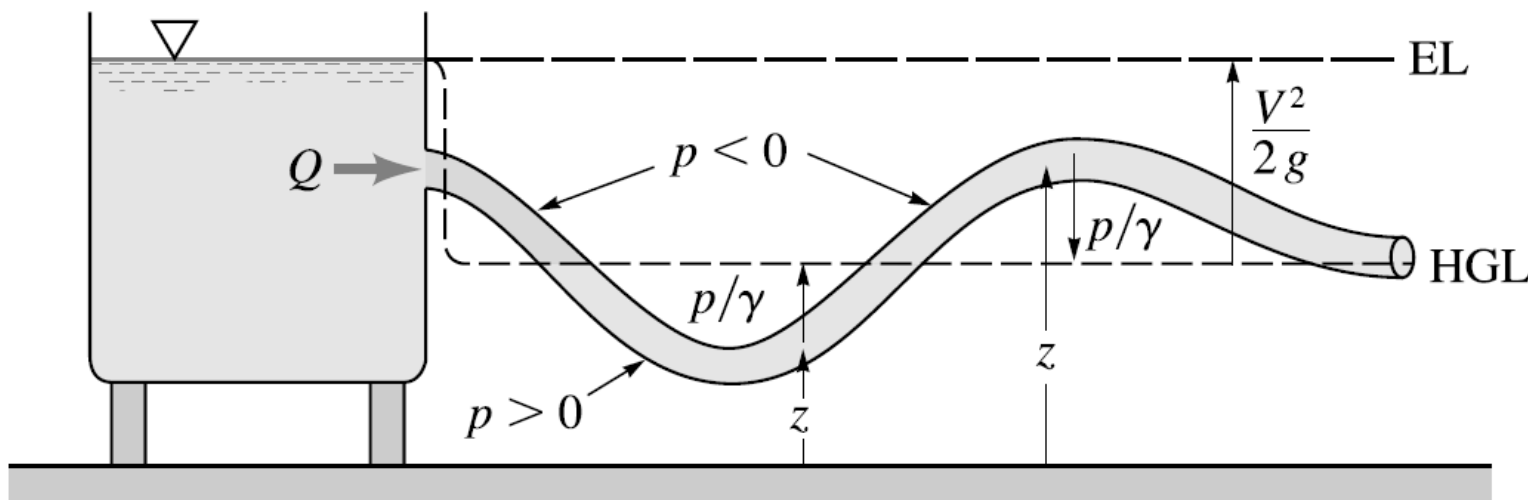


圖 3.15 能量線與水力梯度線的應用。

例題 3.13 能量線與水力梯度線

■ 已知—

如圖 E3.13 所示，水從貯槽以虹吸方式再經一等徑的軟管流出。軟管在 (1) 處有一個小洞。

■ 試求—

當虹吸作用時，水是從小洞洩出，還是空氣從小洞被吸入水管，此時虹吸作用是否會喪失？

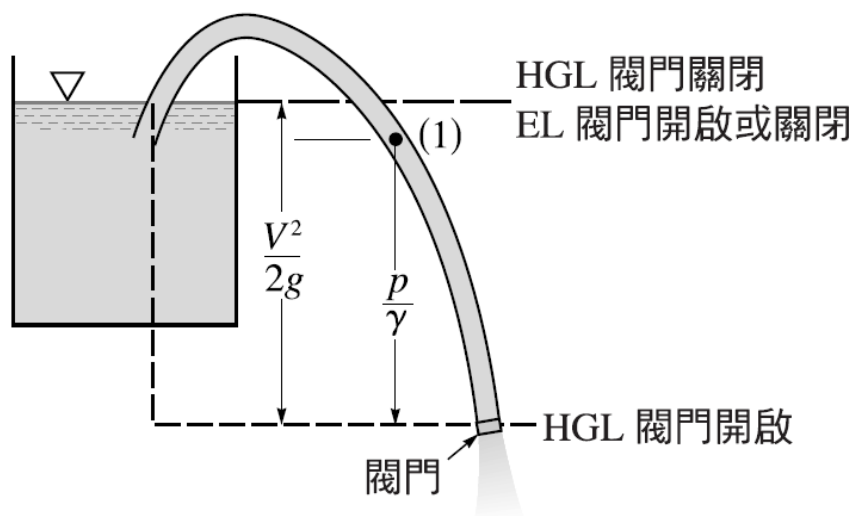


圖 E 3.13

解答

要決定水是從小洞洩出，還是空氣從此小洞被吸入，完全是由水管中點 (1) 的壓力是小於大氣壓力，或是大於大氣壓力來決定。以下述的能量線及水力梯度線的觀念，來決定會發生什麼情況。如果令此為穩定、不可壓縮且無黏性的流動，則總水頭將維持一常數 - 此即能量線為一水平線。

依連續性方程式 ($AV = \text{常數}$) 得知，水管中各處的水流速度應相等。故水力梯度線低於能量線，並維持相同高度差 $V^2/2g$ ，如圖 E3.13 所示。因水管末端的壓力是大氣壓力，則水力梯度線與水管出口處的高度相等。管中任一點的流體高於水力梯度線，故其壓力值低於大氣壓力。

因此，空氣將在點 (1) 處經小洞項吸入水項內。 (Ans)

■註解一

事實上，流體的黏度效應是非常重要的，所以上述簡化的分析（水平能量線）是不正確的。然而，但是如果管路「直徑不是太小」，長度「不是太長」，黏度「不是太黏」且流率「不是太大」的情況下，則上述的結果可能會很準確。所以只要其中任一假設條件被放寬，就有必須更詳細的分析（見第 8 章）。如果水管末端被封閉使得流率變為零，則水力梯度線將會與能量線重合在一起（整個水管 $V^2/2g$ ）而使點 (1) 的壓力將會大於大氣壓力，則水在點 (1) 經小洞流出水管外。

3.8 柏努利方程式的使用限制

Restrictions on the Use of the Bernoulli Equation

在推導柏努利方程式時，其中主要的假設為「流體是不可壓縮的」。雖然，此假設對大部分流動的液體是非常合理的，但對氣體而言，在某些條件下很可能會造成極大的誤差！

上一節中，我們已經知道如果密度維持定值時，則停滯壓會比靜壓大 $\rho V^2/2$ 。如果動壓的數值沒有比靜壓大太多時，介於兩點間密度的變化就不致於過大，因此可將流動視為「不可壓縮」。但是，動壓值仍會隨 V^2 而改變，所以使用「不可壓縮」的假設

所造成的誤差值，將會隨流體速度的平方值增加而變大。

「經驗法則」是指，如果馬赫數小於約 0.3 的理想氣體流動，可視為不可壓縮。馬赫數 $Ma = V/c$ 是流體的速率 V 與流體的音速 c 之比值。在標準空氣狀態（ $T_1 = 59^\circ\text{F}$ ， $c_1 = \sqrt{kRT_1} = 1117 \text{ ft/s}$ ）對應的流體速度為 $V_1 = c_1 Ma_1 = 0.3(1117 \text{ ft/s}) = 335 \text{ ft/s} = 228 \text{ mi/hr}$ 。因此，在極高的流動速度時，氣體的壓縮性就顯得特別重要。

柏努利方程式（3.6 式）另一個限制為假設「流體為穩定流動」。在此穩定流動中，一流線上質點速度僅為在流線位置 s 的函數，即沿流線 $V = V(s)$ 。但是在不穩定流動中，質點速

度將會是時間的函數，所以沿著流線 $V = V(s, t)$ 。如果對速度求時間的導數得流線加速度為 $a_s = \partial V / \partial t + V \partial V / \partial s$ ，而不是穩定流的加速度 $a_s = V \partial V / \partial s$ 而已。此不穩定項 $\partial V / \partial t$ ，除非再做額外的假設，將不允許運動方程式的積分變得容易（如前述以積分得到柏努利方程式）。

柏努利方程式另一個限制為假設「流體為無黏性流動」。前述曾提到柏努利方程式，實項上就是指利用牛頓第二定律沿流線的一次積分的結果。因為沒有將黏性效應納入考量，流體系統可被視為一守恆的系統，使此通用積分變為可能，系統的總能量維持定值。如果系統的黏性效應較大時，則系統非守恆且能量損失會發生。

3.9 總結與學習指能

Chapter Summary and Study Guide

下列核對清單提供本章之學習指南：

1. 寫出各粗體字之意義，並了解每個相關觀念。
2. 解釋柏努利方程式的壓力項、高度項及速度項的原意即每項與牛頓第二運動定律的相關性。
3. 在簡單的情況中應用柏努利方程式，包括皮托靜壓管、自由噴流、限制流與流量計。
4. 使用質量守恆（連續方程式）的觀念搭配柏努利方程式解決簡單流動問題。

- 
5. 應用牛頓第二定律於適當穩定的，無黏性、不可壓縮流動於垂直直流線方向。
 6. 使用壓力頭、高度頭、速度頭及總水頭的觀念來解決各種流動問題。
 7. 解釋及使用靜壓、停滯壓、動壓及總壓的觀念。
 8. 使用能量線和水利梯度線觀念來解決各種流動問題。